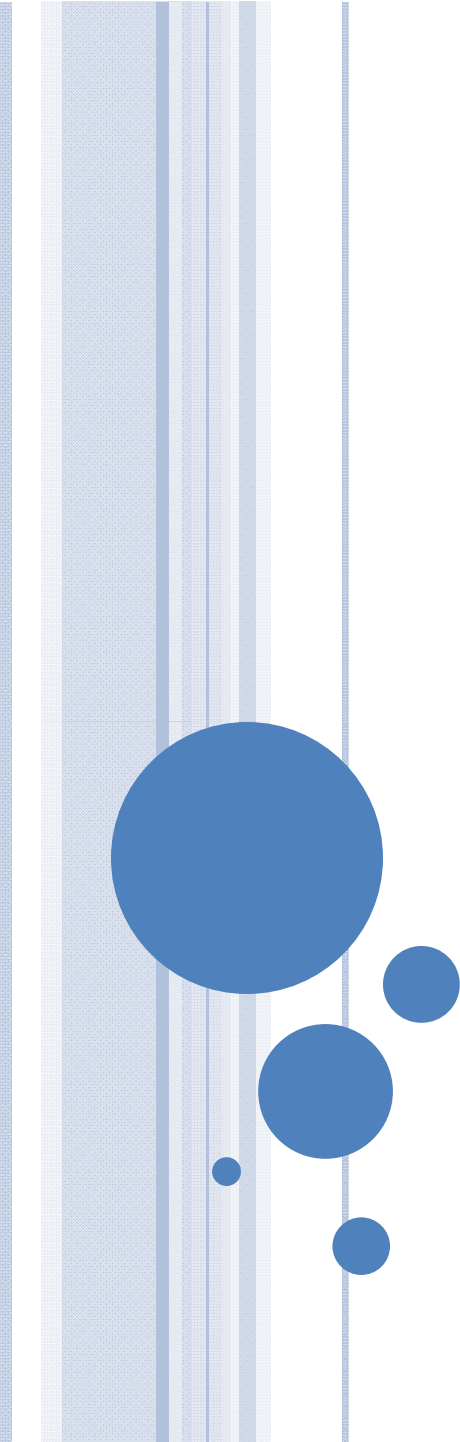




MATEMÁTICA FINANCEIRA

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Juro (J)

- Em princípio, uma unidade monetária hoje é preferível à mesma unidade monetária disponível amanhã.
- Postergar uma entrada de caixa (recebimento) por certo tempo envolve um sacrifício, o qual deve ser pago mediante uma recompensa, definida pelos juros.

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Juro (J)

- São os juros que efetivamente induzem o adiamento do consumo, permitindo a formação de poupanças e de novos investimentos na economia.

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Juro (J)

Os juros devem ser eficientes de maneira a remunerar:

- o risco envolvido na operação
- a perda do poder de compra (inflação)
- o custo de oportunidade

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Juro (J)

- Outras denominações para juro são **rendimento do capital, ganho sobre o capital ou remuneração do capital.**

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Capital Inicial (C_0)

Capital pode ser definido como sendo a quantia inicial que se tem ou que se recebe.

Outras denominações para capital inicial são **capital** (C), **principal** (P), **valor presente** (VP), valor inicial, valor aplicado ou depósito inicial.

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Montante (M ou S)

Montante é o resultado total que se obtém da aplicação do capital, ou seja, é quanto se recebe ou se paga pelo “empréstimo” do capital.

O montante também é chamado de **capital final** (C_t), **valor futuro** (VF), valor de resgate, “capital + juros”, valor final ou valor capitalizado.

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Período (t ou n)

Período é definido como sendo o espaço de tempo pelo qual o capital ficou aplicado. Este dado vem representado por um número de períodos que podem ser, por exemplo, dias, meses, trimestres ou anos.

Representamos o número de períodos pela letra **n**, mas ele também pode ser identificado pela letra **t**, de tempo.

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Taxa de Juros (i ou r)

- A taxa de juros é o coeficiente que determina o valor do juro, isto é, a remuneração do fator capital utilizado durante certo período de tempo.

- As taxas de juros se referem sempre a uma unidade de tempo (mês, semestre, ano, etc.) e podem ser representadas equivalentemente de duas maneiras: **taxa percentual e taxa unitária.**

- A notação **i** vem do inglês *interest* (taxa).

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira Taxa Percentual

- A taxa percentual se refere aos “centos” do capital, ou seja, o valor dos juros para cada centésima parte do capital.

Por exemplo, um capital de R\$ 1.000,00 aplicado a 20% ao ano rende de juros ao final deste período:

$$\text{Juro} = \frac{\text{R\$ 1.000,00}}{100} \times 20$$

- O capital de R\$ 1.000,00 tem dez centos. Como cada um deles rende 20, a remuneração total da aplicação no período é, portanto, de R\$ 200,00.

$$\text{Juro} = \text{R\$ 10,00} \times 20 = \text{R\$ 200,00}$$

Conceitos Fundamentais da Matemática

Financeira

Taxa Unitária

- A **taxa unitária** centra-se na unidade de capital. Reflete o rendimento de cada unidade de capital em certo período de tempo.

- No exemplo acima, a taxa percentual de 20% ao ano indica um rendimento de 0,20 (20% = 20/100) por unidade de capital aplicada, ou seja:

$$\text{Juro} = \text{R\$ } 1.000,00 \times \frac{20}{100}$$

$$\text{Juro} = \text{R\$ } 1.000,00 \times 0,20 = \text{R\$ } 200,00$$



Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

EXEMPLOS DE TAXA DE JUROS		
Forma PERCENTUAL	Para transformar na forma unitária	Forma UNITÁRIA
20% ao ano	20/100	0,2 ao ano
6% ao semestre	6/100	0,06 ao semestre
2% ao mês	2/100	0,02 ao mês
0,3% ao dia	0,3/100	0,003 ao dia

Inversamente, para transformar uma taxa unitária em sua forma percentual deve-se multiplicá-la por 100.

Representação Gráfica dos Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

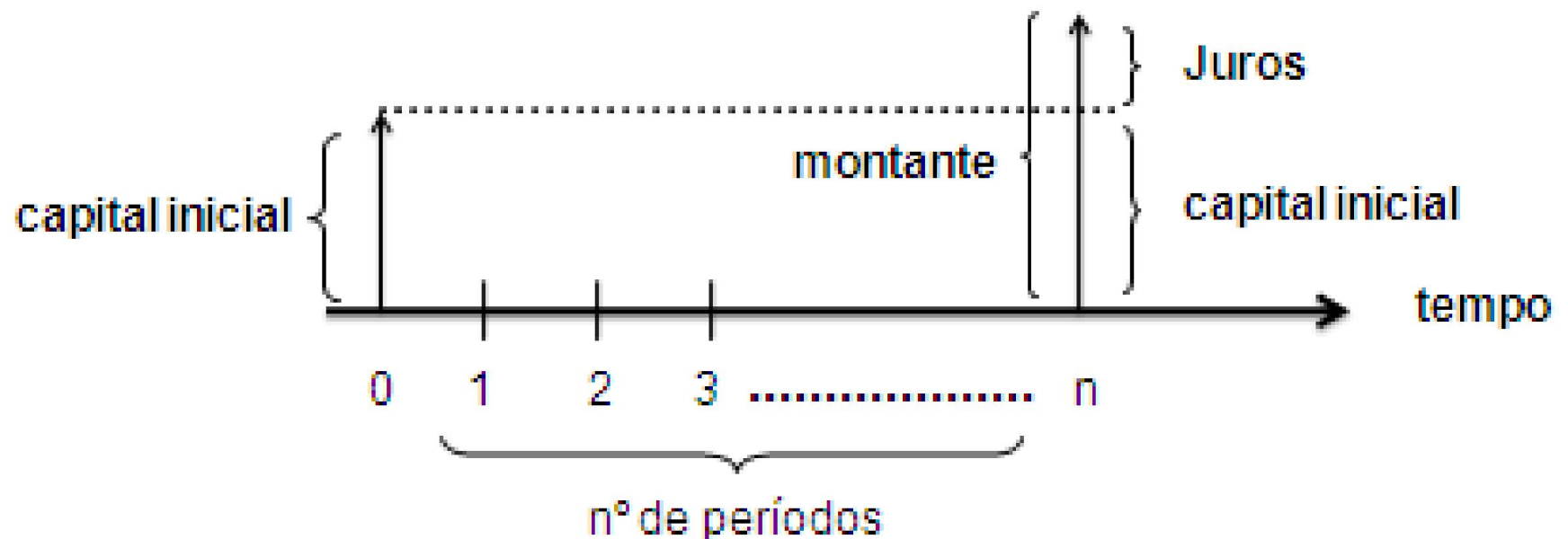
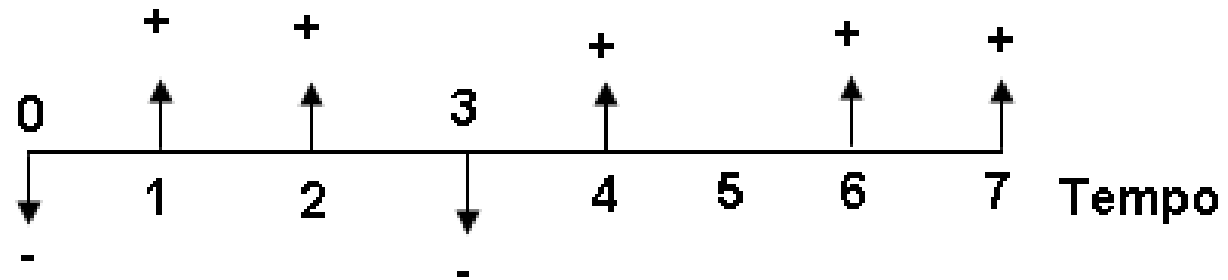


Diagrama do Fluxo de Caixa

Entradas de
caixa (+)

Saídas de
caixa (-)



CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Regras Básicas

- Nas fórmulas de matemática financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo.
- Os critérios de transformação do prazo e da taxa para a mesma unidade de tempo podem ser efetuados através das regras de juros simples (média aritmética) e de juros compostos (média geométrica), dependendo do regime de capitalização definido para a operação.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Critérios de capitalização dos juros

Os critérios (regras) de capitalização demonstram como os juros são transformados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Nesta conceituação podem ser identificados dois regimes de capitalização dos juros: **simples** (ou linear) e **composto** (ou exponencial).

Conceitos Fundamentais da Matemática

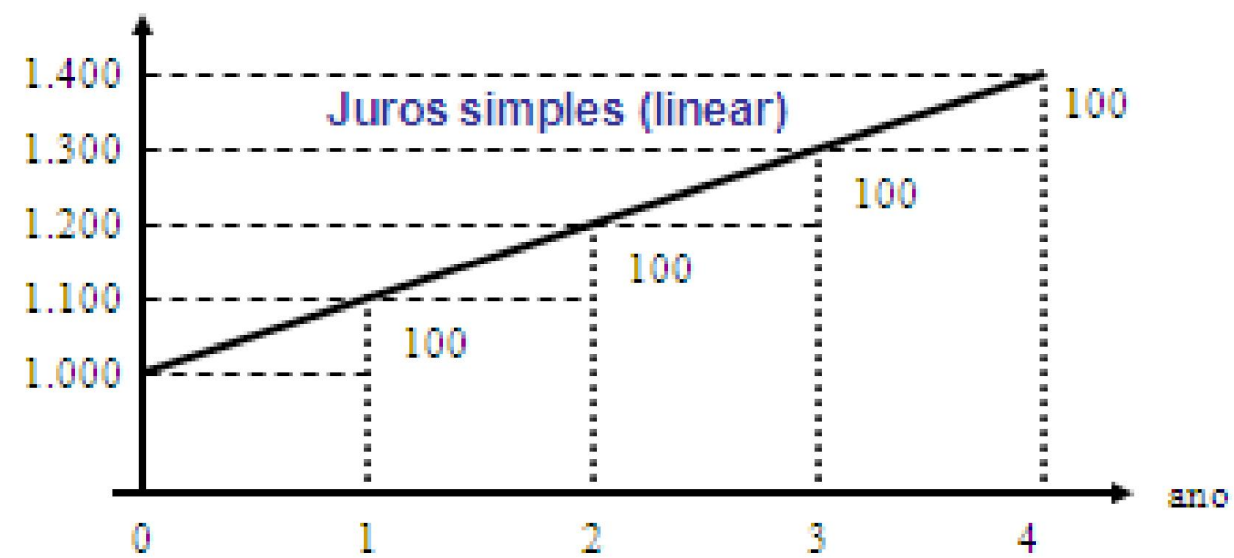
CAPITALIZAÇÃO SIMPLES (juros simples)

EXEMPLO

Suponha um indivíduo que deposita **R\$1.000,00** em um banco que lhe promete **juros simples de 10% a.a.** Qual será seu saldo ao final de 4 anos?

Ano	Saldo inicial	Juros	Saldo final
1	1.000	$0,1 \times 1.000 = 100$	1.100
2	1.100	$0,1 \times 1.000 = 100$	1.200
3	1.200	$0,1 \times 1.000 = 100$	1.300
4	1.300	$0,1 \times 1.000 = 100$	1.400

Valor Futuro



CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

- O regime de capitalização simples comporta-se como se fosse uma progressão aritmética (PA), crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo. Neste critério, os juros apenas incidem sobre o capital inicial da operação (aplicação ou empréstimo), não se registrando juros sobre o saldo dos juros acumulados.

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

- Os juros, por incidirem exclusivamente sobre o capital inicial de R\$ 1.000,00, apresentam valores idênticos ao final de cada ano ($0,10 \times \text{R\$ } 1.000,00 = \text{R\$ } 100,00$);
- Em consequência, o crescimento dos juros no tempo é linear (no exemplo, cresce R\$ 100,00 por ano), revelando um comportamento idêntico a uma progressão aritmética. Os juros totais da operação atingem, nos 5 anos, R\$ 500,00;
- Se os juros simples, ainda, não forem pagos ao final de cada ano, a remuneração do capital emprestado somente se opera pelo seu valor inicial (R\$ 1.000,00), não ocorrendo remuneração sobre os juros que se formam no período.

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

- Como os juros variam linearmente no tempo, a apuração do custo total da dívida no prazo contratado é processada simplesmente pela multiplicação do número de anos pela taxa anual, isto é: 5 anos x 10% ao ano = 50% para 5 anos.

- Se desejar converter essa taxa anual para mês, por exemplo, basta dividir a taxa anual por 12, isto é: 10% ao ano/12 meses = 0,8333% ao mês, e assim por diante.

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES (JUROS SIMPLES)

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Cálculo dos Juros (J):

$$J = VP \times i \times n$$

J = valor dos juros; **i** = taxa de juros unitária

VP = valor presente; e **n** = prazo

Cálculo do Valor Futuro (VF):

$$VF = VP + J$$

$$VF = VP \times (1 + i \times n)$$

Nota) Da fórmula acima, temos que:

$$VP = \frac{VF}{(1 + i \times n)}$$

EXEMPLO

Uma pessoa aplica R\$ 18.000,00 à taxa de 1,5% ao mês durante 8 meses. Determinar o valor acumulado ao final deste período.

Solução:

$$VP = \text{R\$ } 18.000,00$$

$$i = 1,5\% \text{ ao mês (Taxa unitária igual } 0,015 \text{ a.m.)}$$

$$n = 8 \text{ meses}$$

$$VF = M = ?$$

$$M = 18.000,00 \times (1 + 0,015 \times 8)$$

$$M = 18.000,00 \times 1,12 = \text{R\$ } 20.160,00$$

EXEMPLO

Uma dívida de R\$ 900.000,00 irá vencer em 4 meses. O credor está oferecendo um desconto de 7% ao mês caso o devedor deseje antecipar o pagamento para hoje. Calcular o valor que o devedor pagaria caso antecipasse a liquidação da dívida.

Solução:

$$M = \text{R\$ } 900.000,00$$

$$n = 4 \text{ meses}$$

$$i = 7\% \text{ ao mês } (0,07)$$

$$C = VP = ?$$

$$C = \frac{M}{(1 + i \times n)} \quad C = \frac{900.000,00}{(1 + 0,07 \times 4)} = \frac{900.000,00}{1,28} = 703.125,00$$

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

TAXA PROPORCIONAL E TAXA EQUIVALENTE

- Toda operação envolve dois prazos: (1) o prazo a que se refere a taxa de juros; e (2) o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros.
- É necessário para o uso das fórmulas de matemática financeira expressar esses prazos diferentes na mesma base de tempo.
- No regime de juros simples, diante de sua própria natureza linear, esta transformação é processada pela denominada taxa proporcional de juros, também chamada de taxa linear. Essa taxa proporcional é obtida da divisão entre a taxa de juros considerada na operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros (quantidade de períodos de capitalização).

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

TAXA PROPORCIONAL E TAXA EQUIVALENTE

Exemplo

Calcular a taxa anual proporcional a:

- (a) 6% ao mês;
- (b) 10% ao bimestre.

Solução

a) $i = 6\% \times 12 = 72\%$ ao ano

b) $i = 10\% \times 6 = 60\%$ ao ano

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

TAXA PROPORCIONAL E TAXA EQUIVALENTE

Exemplo

Calcular a taxa de juros semestral proporcional a:

(a) 60% ao ano; (b) 9% ao trimestre.

Solução:

Deve haver uma igualdade entre a razão das taxas e a razão dos períodos a que se referem.

$$\text{a) } i = \frac{60\%}{12} \times 6 = 30\% \text{ a.s., porque } \frac{12}{6} = \frac{60}{i}$$

$$\text{b) } i = \frac{9\%}{3} \times 6 = 18\% \text{ a.s.}$$

Exemplo

Uma instituição financeira oferece a seus clientes uma taxa de rentabilidade de 1,2% a.m., a juros simples. Determinar o valor do rendimento de uma aplicação de R\$10.000,00 efetuada nessa instituição por um prazo de 18 dias.

Solução

$VP = 10.000$, $n = 18$ dias , $i = 1,2\% / 30 = 0,04\%$ a.d.

$\text{Rendimento} = VF - VP = 10.000,00 \times 0,0004 \times 18 = \text{R\$ } 72,00.$

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

NOMENCLATURA

Capital Inicial (**C₀**)

ou

Principal (**P**)

ou

Valor Presente (**VP**)

Capital Final (**C_t**)

ou

Montante (**M** ou **S**)

ou

Valor Futuro (**VF**)

Períodos: **t** ou **n**

Juros ou rentabilidade:
i ou **r**

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Regimes de capitalização (continuação)

No **Regime de Capitalização composta** (**juros compostos**), os juros de um período são *incorporados* ao capital para cálculo do período seguinte. Diz-se, assim, que os juros são **capitalizados** (somados ao capital) e passam a gerar novos juros no período seguinte, resultando no que se denomina “juros sobre juros”.

Como os juros de cada período são apurados a partir do valor inicial capitalizado, ou seja, acrescido dos juros acumulados até o período anterior, pode-se inferir que os rendimentos serão crescentes para uma mesma aplicação ou um mesmo investimento.

Conceitos Fundamentais da Matemática

CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA (juros compostos)

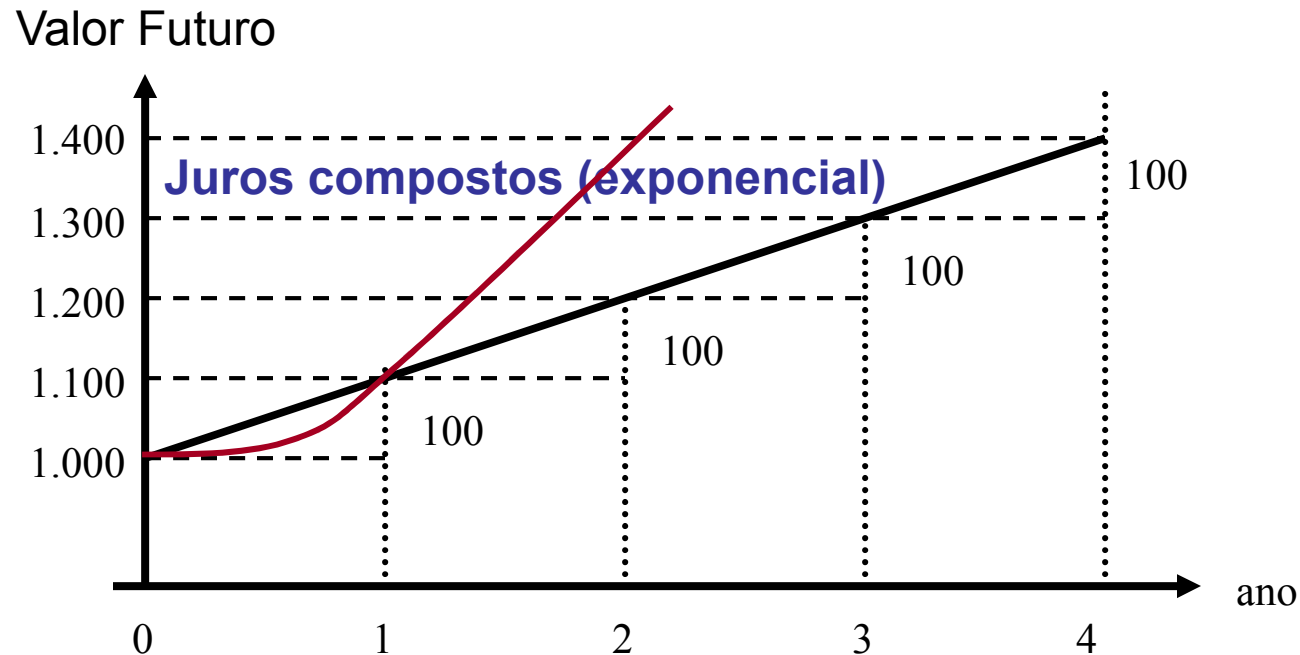
EXEMPLO

Suponha um indivíduo que deposita **R\$1.000,00** em um banco que lhe promete **juros compostos de 10% a.a.** Qual será seu saldo ao final de 4 anos?

Ano	Saldo inicial	Juros	Saldo final
1	1.000,00	$0,1 \times 1.000 = 100,00$	1.100,00
2	1.100,00	$0,1 \times 1.100 = 110,00$	1.210,00
3	1.210,00	$0,1 \times 1.210 = 121,00$	1.331,00
4	1.331,00	$0,1 \times 1.331 = 133,10$	1.464,10

JUROS COMPOSTOS - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)



$$VF = VP \times (1 + i)^t$$
$$VF = 1.000 \times (1 + 0,1)^t$$

VF = capital ao final do ano t
 i = taxa de juros
 VP = capital inicial

Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Capitalização composta (juros compostos)

- Juros de cada período são calculados sobre o saldo existente no início do respectivo período;
- Juros acumulados ao longo dos períodos, quando retidos pela instituição financeira, são capitalizados e passam a render juros; e
- Crescimento do dinheiro, ao longo do tempo, é exponencial (ou em progressão geométrica)

CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA (JUROS COMPOSTOS)

Conceitos Fundamentais da Matemática

Financeira

Ao **final de cada período**, o juro obtido nesse período é incorporado ao principal que o produziu e passam os dois, principal mais juro, a render juros no período que segue.

Assim :

$$\begin{aligned} S_1 &= P + J = P + P \times i \times 1 \Rightarrow S_1 = P \times (1 + i) \\ S_2 &= S_1 + J_2 = S_1 + S_1 \times i \times 1 = S_1 \times (1 + i) = P \times (1 + i)^2 \\ S_3 &= P \times (1 + i)^3 \quad \text{e assim por diante.} \end{aligned}$$

A fórmula geral é dada por:

$$S_n = P \times (1 + i)^n \quad \text{ou} \quad VF = VP \times (1 + i)^n$$

EXEMPLO

Determinar o valor acumulado em 24 meses, a uma taxa de 1% a.m., a partir de um principal de R\$ 2.000,00.

Basta aplicar a fórmula

$$VF = VP (1 + i) ^ n$$

... HP ...

$$VF = 2.000,00(1+0,01)^{24} = 2.539,46$$

TAXAS EQUIVALENTES – JUROS COMPOSTOS

$$(1 + i_d)^{360} = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_t)^4 = (1 + i_s)^2 = (1 + i_a)$$

Duas taxas equivalentes, quando aplicadas a um mesmo capital inicial **(principal)**, durante um mesmo período de tempo, produzem o mesmo capital disponível **(montante)** acumulado ao final daquele período.

TAXA EFETIVA

- Unidade de tempo da taxa coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

- Exemplos

- (I) 3% a.m. (capitalizados mensalmente);
- (II) 12% a.a. (capitalizados anualmente).

Taxa Nominal

- Unidade de tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

- Exemplos

- (I) 12% a.a capitalizados mensalmente
- (II) 24% a.a capitalizados trimestralmente

Taxa Proporcionais - Juros Simples

A taxa nominal tem uma taxa efetiva implícita, que é obtida através de **taxas proporcionais**, a juros simples

$$(i_a) = (2 \times i_s) = (4 \times i_t) = (12 \times i_m) = (360 \times i_d)$$

Ex: 12% a.a capitalizados mensalmente $\Rightarrow$ **1% a.m**

24% a.a capitalizados trimestralmente $\Rightarrow$ **6% a.t**

TAXAS EQUIVALENTES – JUROS COMPOSTOS

$$(1 + i_d)^{360} = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_t)^4 = (1 + i_s)^2 = (1 + i_a)$$

Duas taxas equivalentes, quando aplicadas a um mesmo capital inicial **(principal)**, durante um mesmo período de tempo, produzem o mesmo capital disponível **(montante)** acumulado ao final daquele período.

EXEMPLO

Quais as taxas de juros compostos mensal e trimestral equivalentes a 25% ao ano?

Solução:

a) Taxa de juros equivalente mensal

$i = 25\%$ a.a.

$q = 1$ ano (12 meses)

$$i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0,25} - 1$$

$$i_{12} = \sqrt[12]{1,25} - 1 = 1,877\% \text{ a.m.}$$

b) Taxa de juros equivalente trimestral

$q = 1$ ano (4 trimestres)

$$i_4 = \sqrt[4]{1 + 0,25} - 1$$

$$i_4 = \sqrt[4]{1,25} - 1 = 5,737\% \text{ a.m.}$$

EXEMPLO

- Uma taxa é dita nominal quando o prazo de capitalização dos juros (ou seja, período de formação e incorporação dos juros ao principal) não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros.

Exemplo) Seja a taxa nominal de juros de 36% ao ano capitalizada mensalmente. Os prazos não são coincidentes. O prazo de capitalização é de um mês e o prazo a que se refere a taxa de juros igual a um ano (12 meses). A taxa por período de capitalização é de $36\%/12 = 3\%$ ao mês (taxa proporcional ou linear).

Taxa efetiva de juros: $i_f = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12} - 1 = 42,6\%$
ao ano

Nota) Quando os prazos forem coincidentes (prazo da taxa e de formação dos juros), a representação da taxa de juros é abreviada. Por exemplo, a expressão única “10% a.a.” indica que os juros são também capitalizados em termos anuais.

NOMENCLATURA DE TAXA DE JUROS

Taxa Efetiva x Taxa Nominal

**Caderneta de Poupança:
6% a.a. ou 0,5 % ao mês?**

$$C(12) = C_0(1,005)^{12}$$
$$= C_0(1,0617)$$

**6,17%
a.a.**

Taxa nominal : 6 % a.a. capitalizados mensalmente

Taxa efetiva mensal: 0,5% a.m.

Taxa efetiva anual: 6,17% a.a.

As três taxas acima são Equivalentes pois quando aplicadas ao mesmo capital inicial, durante um mesmo prazo, produzem o mesmo montante.

DESCONTO EM JUROS SIMPLES

Desconto “por fora” (Desconto Bancário ou comercial): calculado multiplicando-se o Valor Futuro pela taxa de juros e pelo número de períodos.

$$VP = VF \times (1 - d \times n)$$

Desconto “por dentro” (Desconto Racional): calculado multiplicando-se o Valor Presente pela taxa de juros e pelo número de períodos.

$$VF = VP \times (1 + d \times n)$$

EXEMPLO

Determinar o valor da taxa mensal de desconto “por dentro” e “por fora” usada numa operação de desconto de 60 dias, de uma duplicata com valor de resgate de R\$ 10.000,00 e com valor de principal igual a R\$ 9.750,00.

VP = 9.750; VF = 10.000; n = 60 dias (2 meses)

$VF = VP \times (1 + d \times n)$ $VP = VF \times (1 - d \times n)$

EXEMPLO

Você tem uma aplicação para resgate de R\$ 1.500,00 em 3 meses e deseja antecipar a retirada. Se a taxa de Desconto Bancário (Racional) é de 8% ao mês, qual o valor resgatado na data de hoje?

Resolução:

i) Desconto bancário

$$\text{Desconto} = 0,08 \times 3 \times 1500 = 360$$

$$\text{Valor Regatado} = \text{R\$ } 1500 - 360$$

ii) Desconto racional

$$\text{VP} = 1500 / (1 + 0,08 \times 3) = 1209,67$$

$$\text{Desconto} = 1209,67 \times 3 \times 0,08 = 290,32$$

DESCONTO EM JUROS COMPOSTOS

Desconto “por fora” (Desconto Bancário ou comercial): raramente aplicado no Brasil.

$$VP = VF \times (1 - d)^n$$

Desconto “por dentro” (Desconto Racional) : é o mais aplicado na prática.

$$VP = \frac{VF}{(1 + d)^n}$$

EXEMPLO

Você tem uma aplicação para resgate de R\$ 1.500,00 em 3 meses e deseja antecipar a retirada. Se o regime de Desconto Composto é utilizado e a taxa é de 8% ao mês, qual o valor resgatado na data de hoje?

Resolução

$$VP = VF / (1 + j)^n = 1500 / (1,08)^3$$

$$\text{Valor Regatado} = \text{R\$ } 1.190,75$$

EXERCÍCIO EXTRA

Dois meses antes do seu vencimento, um título de valor nominal N sofrerá desconto. Se o desconto for racional composto e a taxa utilizada for de 20% ao mês, o valor do desconto será igual a d . Se o desconto for comercial composto, qual deverá ser a taxa mensal de desconto para que o valor do desconto seja o mesmo?

- (A) 83,3% (B) 69,1% (C) 42,8% (D) 20,0%
(E) 16,7%

SÉRIES UNIFORMES

- Até agora tratamos o juro composto em pagamentos simples, isto é, uma entrada e uma saída de caixa.

- O que acontece quando temos várias entradas (ou saídas) de caixa?

- É o que vamos ver a seguir.

SÉRIES UNIFORMES

EXEMPLO

- Suponha que lhe seja oferecido um bem que custa 4 prestações mensais de R\$1.000,00. Qual o valor presente deste bem, supondo que a taxa de juros praticada no mercado é igual a 10%?

SÉRIES UNIFORMES

$VP = R \times (1 + i)^{-1} + R \times (1 + i)^{-2} + R \times (1 + i)^{-3} + R \times (1 + i)^{-4}$, multiplicando por $(1 + i)$

$VP \times (1 + i) = R + R \times (1 + i)^{-1} + R \times (1 + i)^{-2} + R \times (1 + i)^{-3}$

◦ Diminuindo a segunda equação da primeira, temos:

$VP \times (1 + i) - VP = R - R \times (1 + i)^{-4}$, temos:

$$VP = R \left(\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} \right)$$

SÉRIES UNIFORMES

Generalizando

$$VP = R \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n} \right)$$

Exemplo

Uma pessoa obteve empréstimo de R\$ 10.000,00, para ser pago em 8 prestações iguais, com juro composto de 8% ao mês. Qual o valor de cada prestação?

$$10000 = P \times \left(\frac{(1,08)^8 - 1}{0,08 \times (1,08)^8} \right)$$

resolvendo $P = \text{R\$ } 1.740,10$

SÉRIES UNIFORMES

- Capitalização

Por dedução semelhante a anterior:

$$VF = PGTO \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

Calcule quanto terei no fim de um ano, se deposito R\$ 500,00 durante 11 meses, a juros compostos de 2%.

EXERCÍCIOS

Exercícios: 5; 13; 17; 26.

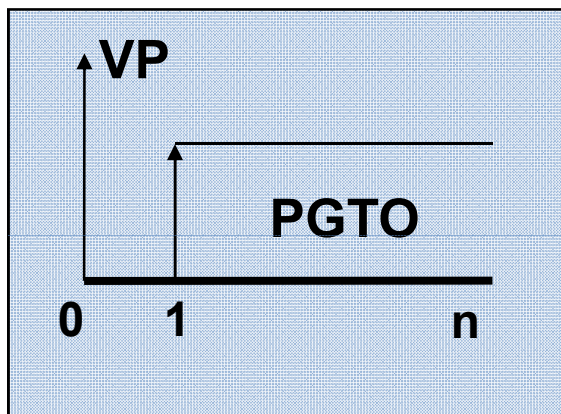
PERPETUIDADES

Esta série ou anuidade se chama assim porque os fluxos de caixa são perpétuos.

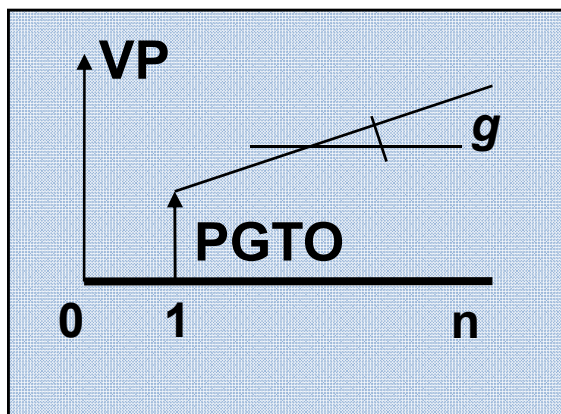
Por esta razão, obviamente, não podemos avaliá-las descontando todos os fluxos de caixa e nem tão pouco aplicando a fórmula diretamente. Felizmente, a avaliação é extremamente simples, e isto pode ser visto com um pouquinho de matemática.

Perpetuidades

1) Séries de pagamentos uniformes e infinitas



$$VP = \frac{PGTO}{i}$$



$$VP = \frac{PGTO}{i - g}$$

Perpetuidades

Exemplo 1

Uma loja comercial tem apresentado receita média anual de R\$ 1.500.000,00. Sabendo-se que possui potencial de crescer em média 5% ao ano o faturamento no futuro, qual o valor do negócio para uma taxa de juros de 10%?

Exemplo 2

O pedágio de uma rodovia estadual arrecada em média \$ 200.000/mês. Calcular o valor presente dessas rendas, considerando um custo de capital de 2% a.m..

PERPETUIDADES

Exemplo 3

Para fazer uma doação, que paga \$100.000 por ano, para sempre, quanto dinheiro deve ser reservado hoje se a taxa de juros é 10%?

Exemplo 4

A Companhia de Seguro Bob's Life Co. está tentando lhe vender uma apólice que renderia a você e a seus herdeiros \$ 5.000 por ano, para sempre. Se a taxa de retorno exigida nesse investimento igual a 8%, quanto você pagaria pela apólice?

Sistemas de amortização

O reembolso de um empréstimo ou financiamento consiste no pagamento de **prestações** em datas predeterminadas. Estas prestações são compostas de duas partes:

- **Amortização:** é a parte da prestação que está abatendo o valor inicial do empréstimo sem o cômputo do juro, ou seja, é a devolução do principal.

- **Juro:** é a parte da prestação que remunera o “dono do dinheiro” pelo empréstimo, ou seja, é o que se cobra pelo “aluguel do dinheiro”.

$$\text{PRESTAÇÃO} = \text{AMORTIZAÇÃO} + \text{JURO}$$

Sistemas de amortização

Outros Conceitos

- **Credor ou Mutuante:** é aquele que dá o empréstimo;
- **Devedor ou Mutuário:** é aquele que recebe o empréstimo;
- **Taxa de Juros:** é a taxa acordada entre as partes. É sempre calculada sobre o saldo devedor; e
- **Carência:** diferimento na data convencional do início dos pagamentos.

Sistemas de amortização

Outros Conceitos (continuação)

- **Prazo de Amortização:** é o intervalo de tempo durante o qual são pagas as amortizações
- **Parcelas de Amortização:** correspondem às parcelas de devolução do principal

Sistema Francês de Amortização

ou

Tabela (Sistema) *Price*

- As prestações são iguais e em sequência, ou seja, é uma série uniforme de pagamentos.
- Nesse sistema, o juro é decrescente e a amortização, crescente.
- A cota de amortização na última prestação é igual ao saldo devedor anterior.
- O saldo devedor em um determinado momento é o valor atual da série, que corresponde aos pagamentos que são devidos.

Sistema Francês de Amortização ou Tabela (Sistema) *Price*

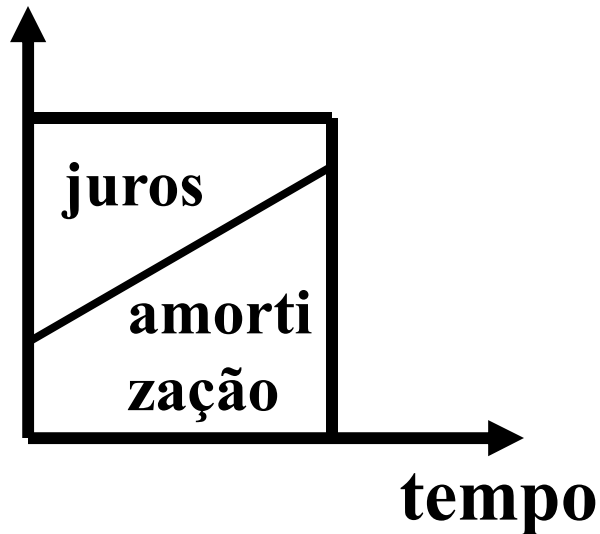
- É utilizado na compra à prazo de bens de consumo (crédito direto ao consumidor).

Nota) Alguns autores consideram a Tabela *Price* (Sistema *Price*) como um caso particular do Sistema Francês de Amortização, em que a única diferença é que a taxa de juros da operação é nominal. Dessa forma, o cálculo da Tabela *Price* se inicia com o cálculo da taxa efetiva da operação. As demais etapas são idênticas àquelas do Sistema Francês.

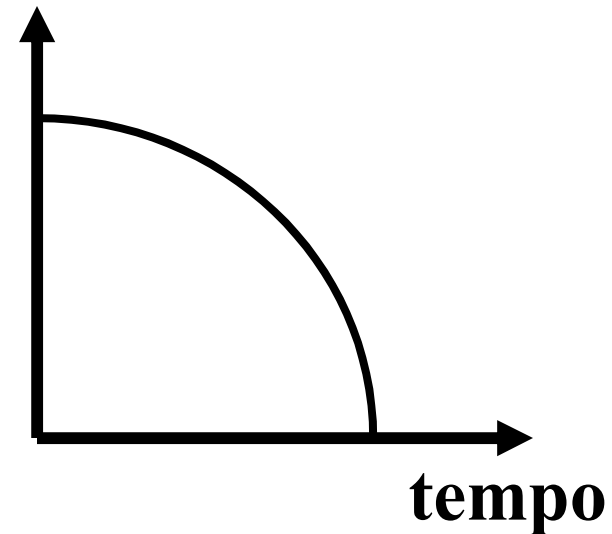
Sistema Francês de Amortização

- Representação das prestações:

prestação



saldo devedor



Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final
0		-	-	-	10.000
1	10.000	+10.000* 10%	-	-	+10.000 +10.000*10%
2					
3					
4					
5					

Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial SI	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final SF
0		-	-	-	10.000
1	10.000	11.000	-	-	11.000
2	SF	SI*j	+p-j	PMT	SI-a
3				PMT	
4				PMT	
5				PMT	

Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final
0		-	-	-	10.000
1	10.000	1.000	-	-	11.000
2	11.000	1.100	2.370	3.470	8.630
3	SF	SI*j	+p-j	3.470	+SI-a
4				3.470	
5				3.470	

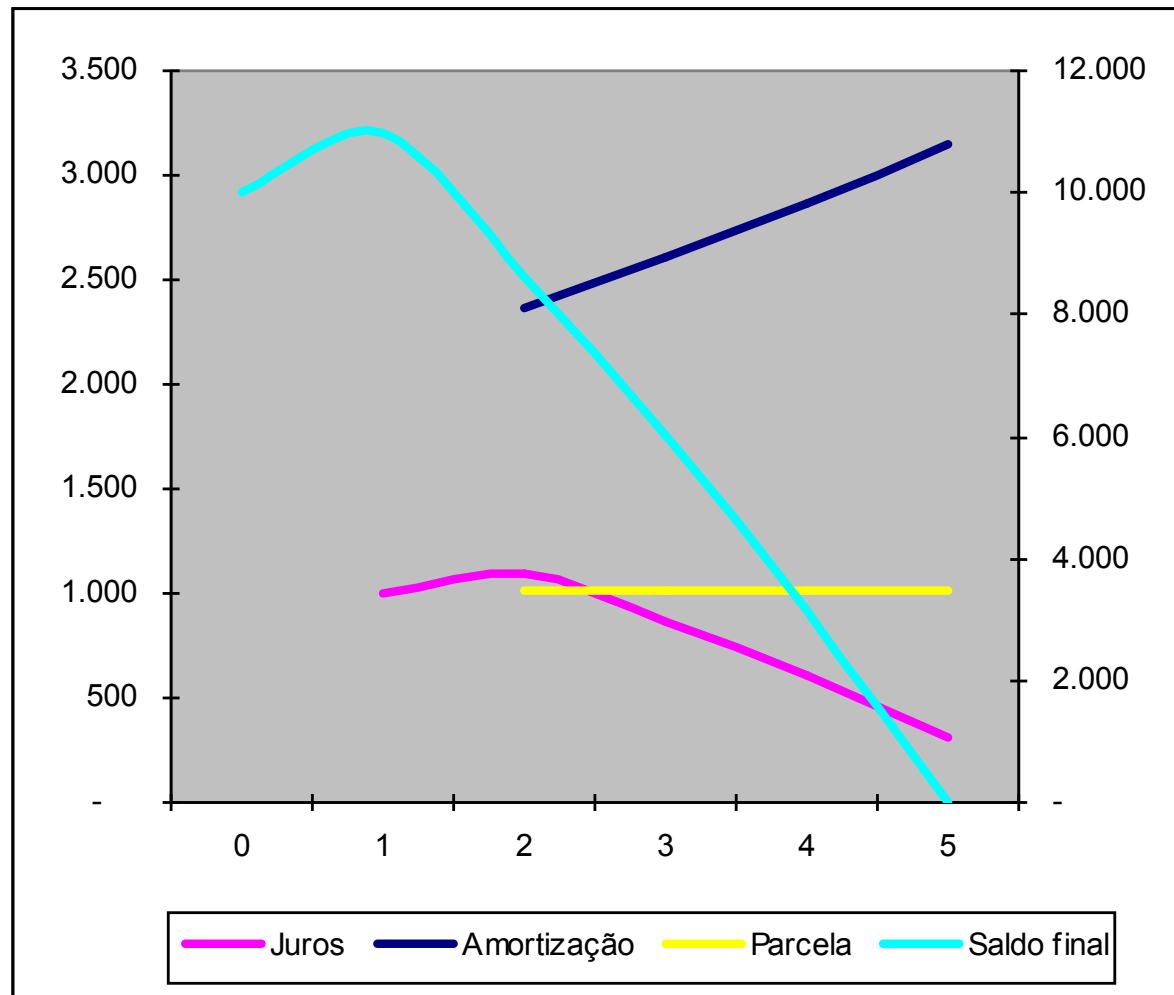
Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final
0		-	-	-	10.000
1	10.000	1.000	-	-	11.000
2	11.000	1.100	2.370	3.470	8.630
3	8.630	863	2.607	3.470	6.023
4	SF	SI*j	+p-j	3.470	+SI-a
5				3.470	

Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final
0		-	-	-	10.000
1	10.000	1.000	-	-	11.000
2	11.000	1.100	2.370	3.470	8.630
3	8.630	863	2.607	3.470	6.023
4	6.023	602	2.868	3.470	3.155
5	3.155	315	3.155	3.470	0

Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

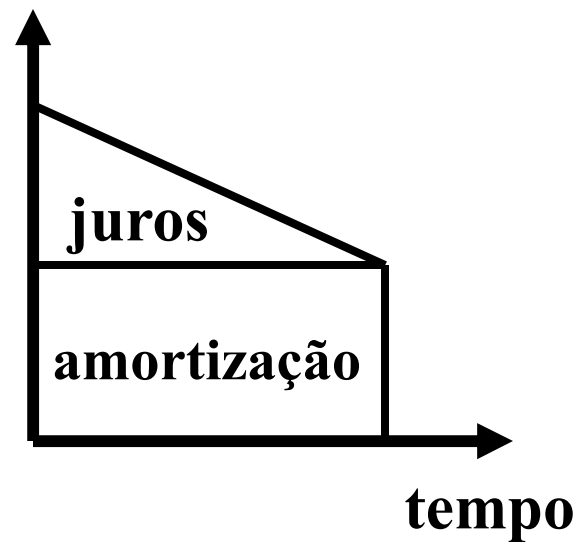


Sistema de amortização constante (SAC) ou Sistema Hamburguês de Amortização

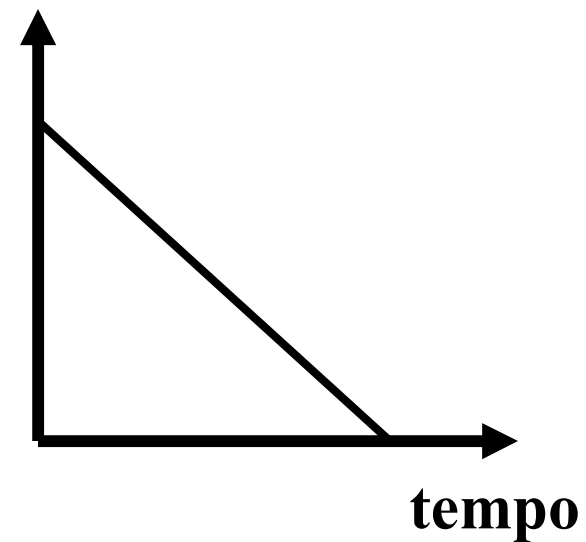
- A amortização é constante e é igual ao valor do empréstimo dividido pelo número de prestações.
- Nesse sistema, a prestação e o saldo devedor decrescem em progressão aritmética.
- Utilizado em financiamentos a longo prazo.
- Popularizado pelo Sistema Financeiro de Habitação (SFH)

- Representação das prestações:

prestação



saldo devedor



Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final
0		-	-	-	10.000
1	10.000	1.000	-	-	11.000
2	11.000	$SI*j$	$+SI/n$	$+j+a$	$+SI-a$
3	$+SI-a$		$+SI/n$		$+SI-2a$
4	$+SI-2a$		$+SI/n$		$+SI-3a$
5	$+SI-3a$		$+SI/n$		$+SI-4a$

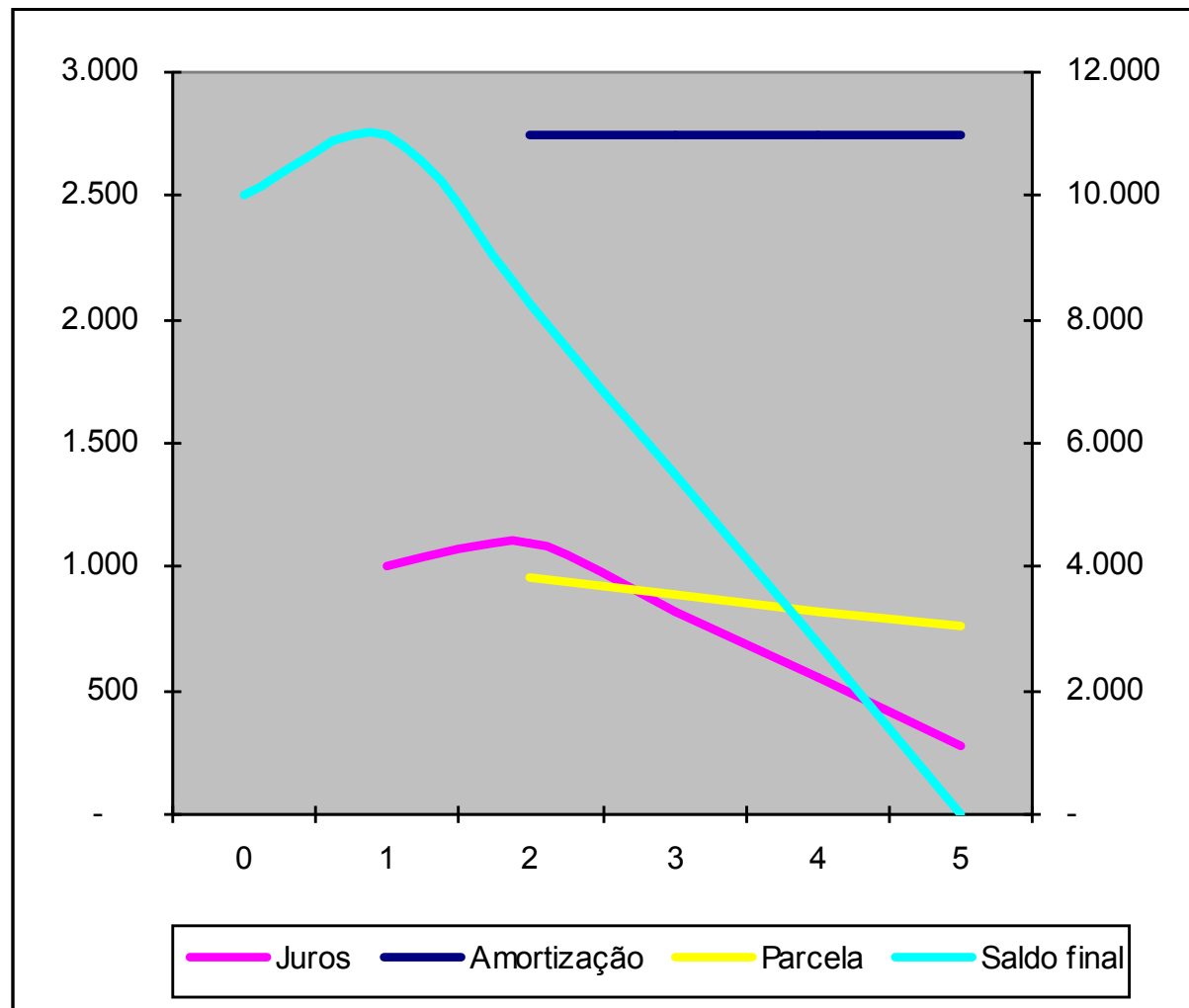
Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final
0		-	-	-	10.000
1	10.000	1.000	-	-	11.000
2	11.000	1.100	2.750	3.850	8.250
3	8.250	+SI*j	2.750	+j+a	5.500
4	5.500		2.750		2.750
5	2.750		2.750		0

Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.

Per. n	Saldo inicial	Juros j	Amort a	Parcela p	Saldo final
0		-	-	-	10.000
1	10.000	1.000	-	-	11.000
2	11.000	1.100	2.750	3.850	8.250
3	8.250	825	2.750	3.575	5.500
4	5.500	550	2.750	3.300	2.750
5	2.750	275	2.750	3.025	0

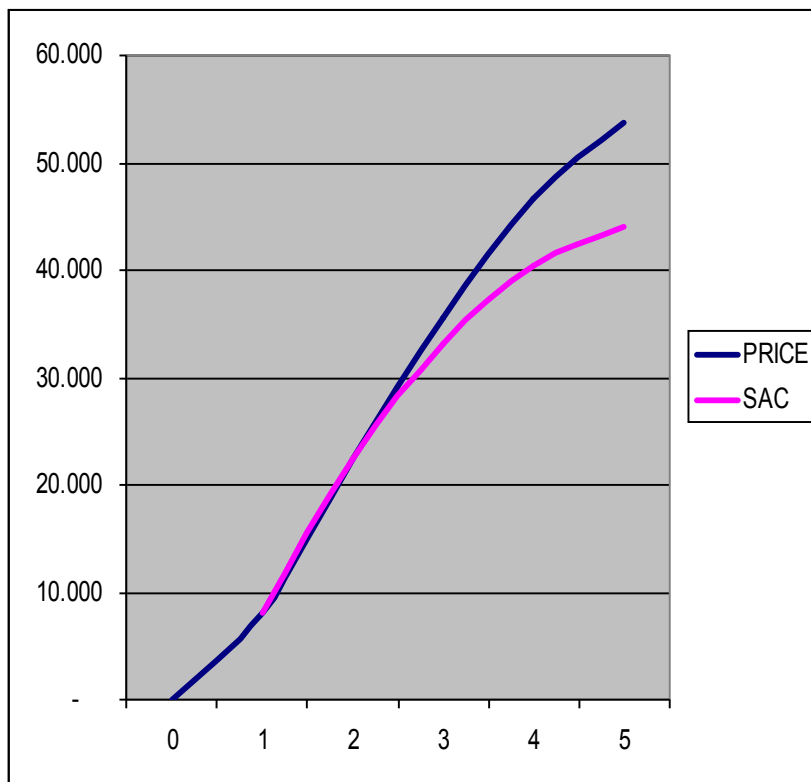
Ex. Uma máquina custa R\$ 10.000 com financiamento em até 5 anos, carência de principal e juros no primeiro ano e parcelas anuais calculadas com base em uma taxa de juros igual a 10% a.a.



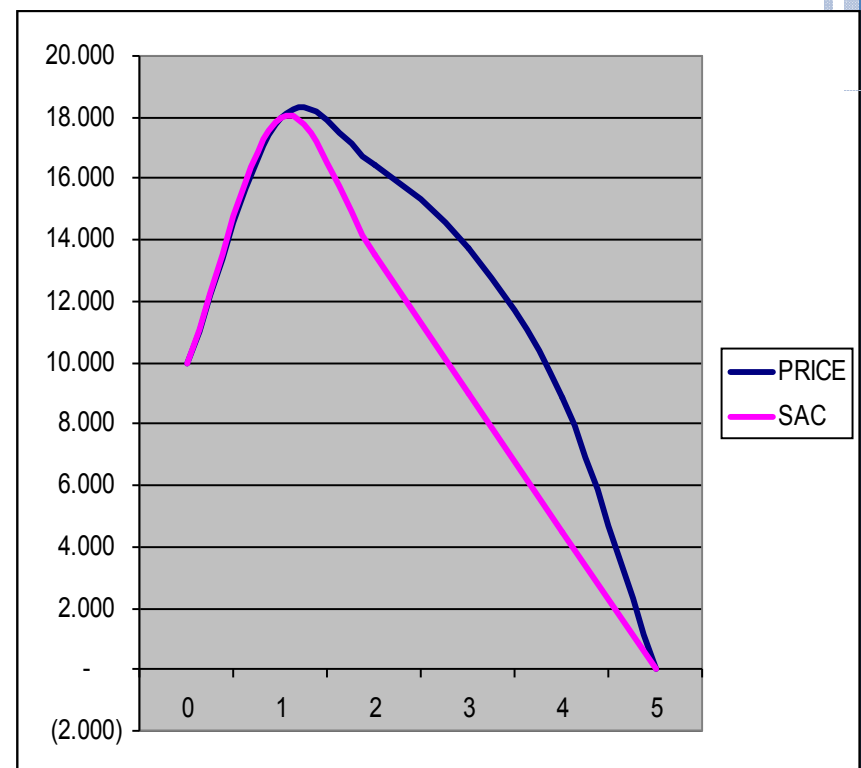
Sistemas de Amortização

- O sistema *Price* expõe mais o financiador ao risco de crédito;
- O volume de juros recebidos é maior no sistema Price

Juros acumulados



Saldo devedor



Sistema de Amortização Misto (SAM)

- As prestações correspondem à média aritmética das prestações calculadas pelo Sistema Francês e pelo SAC.

Sistema de Americano de Amortização

- Nesse sistema, o devedor obriga-se a devolver o principal em uma só parcela, no final do prazo concedido. Os juros podem ser pagos durante a carência ou capitalizados e devolvidos juntamente com o principal.

- Todo o prazo do empréstimo é considerado como carência e a amortização, portanto, é feita no último pagamento. A forma de pagamento dos juros define as duas modalidades do Sistema Americano.