



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA.
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA MODALIDADE À DISTÂNCIA**



DISCIPLINA: DESENHO GEOMÉTRICO

Prof. JORGE HENRIQUE DE JESUS BERREDO REIS

Sumário

APRESENTAÇÃO	1
SUGESTÕES PARA O ESTUDO DE DESENHO GEOMÉTRICO	2
OS INSTRUMENTOS DE DESENHO	3
1. DESENHO GEOMÉTRICO	5
2. ENTES GEOMÉTRICOS	6
3. RETA	7
3.1. SEMI-RETA	7
3.2. SEGMENTO DE RETA	8
3.3. SEGMENTOS COLINEARES	8
3.4. SEGMENTOS CONSECUTIVOS	8
3.5. RETAS COPLANARES	8
3.6. RETAS CONCORRENTES	8
3.7. POSIÇÕES DE UMA RETA	9
3.8. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS	9
4. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	10
4.1. TRAÇADO DE PERPENDICULARES	10
4.2. TRAÇADO DE PARALELAS	13
4.3. DIVISÃO DE UM SEGMENTO DE RETA EM UM NÚMERO QUALQUER DE PARTES IGUAIS	14
5. ÂNGULO	15
5.1. DEFINIÇÃO	15
5.2. ELEMENTOS	15
5.3. REPRESENTAÇÃO	15
5.4. MEDIDA DE ÂNGULOS	15
5.5. CONSTRUÇÃO E MEDIDA DE ÂNGULOS COM O TRANSFERIDOR:	15
5.6. CLASSIFICAÇÃO:	16
5.6.1. Quanto à abertura dos lados	16
5.6.2. Quanto à posição que ocupam	17
5.7. POSIÇÕES RELATIVAS DOS ÂNGULOS:	18
5.8. TRANSPORTE DE ÂNGULOS	19
5.9. BISSETRIZ DE UM ÂNGULO	20

5.10.	CONSTRUÇÃO DE ÂNGULOS COM O COMPASSO	20
6.	TRIÂNGULOS	24
6.1.	DEFINIÇÃO	24
6.2.	ELEMENTOS	24
6.3.	CLASSIFICAÇÃO	24
6.3.1.	Quanto aos lados	24
6.3.2.	Quanto aos ângulos	25
6.4.	LINHAS NOTÁVEIS DOS TRIÂNGULOS	26
6.5.	EXERCÍCIOS	32
7.	QUADRILÁTEROS	36
7.1.	DEFINIÇÃO	36
7.2.	ELEMENTOS	36
7.3.	CLASSIFICAÇÃO	36
7.3.1.	Paralelogramos	36
7.3.2.	Trapézios	39
7.3.3.	Trapezóides	41
7.4	EXERCÍCIOS	42
8.	POLÍGONOS	48
8.1.	DEFINIÇÃO	48
8.2.	ELEMENTOS	48
8.3.	POLÍGONO CONVEXO	48
8.4.	POLÍGONOS REGULARES	48
8.5.	DENOMINAÇÃO	48
8.6.	CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES	49
9.	CIRCUNFERÊNCIA	57
9.1.	DEFINIÇÃO	57
9.2.	CÍRCULO	57
9.3.	LINHAS DA CIRCUNFERÊNCIA	57
9.4.	DIVISÃO DA CIRCUNFERÊNCIA EM PARTES IGUAIS: MÉTODO GERAL DE BION	58
9.5.	RETIFICAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA	59
9.6.	POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS	59
9.6.1.	Não secantes	59

9.6.2. Secante	61
9.6.3. Tangente	61
9.7. ÂNGULOS DA CIRCUNFERÊNCIA	62
9.8. EXERCÍCIOS	63
10. SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS	67
10.1. DEFINIÇÃO	67
10.2. RAZÃO DE SEMELHANÇA	67
10.3. CONSTRUÇÃO DE FIGURAS SEMELHANTES	67
10.4. HOMOTETIA	68
11. EQUIVALÊNCIA DE FIGURAS PLANAS	69
11.1. DEFINIÇÃO	69
11.2. EQUIVALÊNCIA DE TRIÂNGULOS	69
11.3. EXERCÍCIOS	70
12. SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	76
12.1. DEFINIÇÃO	76
12.2. ELEMENTOS DOS SÓLIDOS	76
12.3. SÓLIDOS DE ARESTAS	76
12.4. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:	87

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
MODALIDADE A DISTÂNCIA
DISCIPLINA: DESENHO GEOMÉTRICO
PROF: JORGE HENRIQUE DE JESUS BERREDO REIS



Olá amigo!

Bem vindo ao módulo de Desenho Geométrico do nosso curso.

Como você sabe, a Geometria é um capítulo importantíssimo no estudo da Matemática e o Desenho Geométrico é uma ferramenta valiosíssima para uma melhor compreensão das formas e propriedades das figuras e corpos.

Nessa nossa conversa inicial vamos propor algumas questões que, com certeza, tornarão mais agradável e mais fácil as nossas discussões sobre o assunto.

Em primeiro lugar gostaríamos de dizer que o desenho é uma habilidade que qualquer pessoa é capaz de desenvolver. Ainda mais, com o auxílio de nossos instrumentos, a tarefa ficará bem mais fácil. O Desenho Geométrico é fortemente baseado em procedimentos lógicos que estamos acostumados a realizar no nosso dia a dia. Quer ver um exemplo? Se você é capaz de escrever - e se não fosse assim não estaria aqui - é também capaz de manusear um lápis e desenhar. A propósito, escrever nada mais é do que desenhar letras, não é mesmo? O que vai fazer a diferença entre escrever e desenhar bem ou mal é a dedicação com que você vai se atirar a essa tarefa.

Outra coisa que queremos lhe falar, dentro dessa lógica com que vamos trabalhar, é que não existe nada nesse mundo que seja difícil. Muita gente tem aversão a algumas atividades por achar que as mesmas são difíceis e que não conseguirão aprendê-las e nós sabemos muito bem que o desenho não está livre disso. Mas, pense bem, em algum estágio de nossas vidas, certas atividades como andar, falar, escrever, amarrar os cadarços de nossos sapatos, eram ações que davam um certo trabalho, não é mesmo? Só mais um exemplo: você acha que pilotar um jato é coisa difícil, inatingível? Se assim fosse essa profissão de piloto não existiria, certo? Então, o que é que acontece? O futuro piloto tem as primeiras lições teóricas; depois, tem aulas em simuladores de vôo, voa acompanhado de instrutor, e assim vai até chegar ao comando do avião.

Essa trajetória toda é dividida em etapas, conhecimentos que se vão acumulando ao longo de estudos, até se atingir o objetivo final. E, note que desenhar é bem menos arriscado que pilotar um jato, certo?

Pois bem, nossos estudos serão assim: divididos em etapas, concluídas passo a passo e, ao final do curso você terá acrescentado mais esse conhecimento em sua formação profissional. Saudações PITAGÓRICAS e EUCLIDIANAS e até a próxima!

SUGESTÕES PARA O ESTUDO DE DESENHO GEOMÉTRICO



Qualquer assunto que pretendamos estudar tem que ser acompanhado de um método, de um guia ou roteiro que facilite a nossa tarefa. Sabe a velha receita daquele bolo gostoso que vai passando de mãe para filha, para as amigas mais chegadas, para as colegas do trabalho? Pois é. Uma receita, na verdade, é um guia de como preparar um alimento, misturando os ingredientes na medida certa, cozinhando-os no tempo certo e aí, o alimento fica pronto.

Assim acontece quando estudamos um assunto, quando queremos aprender uma determinada coisa. Vamos, passo a passo, formando uma cadeia de conhecimentos que vão se juntando com outros e, de repente, passa-se da condição de “eu não sabia” para “agora eu já sei”.

É desse jeito que você deve encarar o seu aprendizado em **Desenho Geométrico**. Leia cada capítulo atentamente, procurando fazer uma idéia teórica do item abordado. Organize as coisas de forma lógica. Lembre-se sempre que a parte teórica é de fundamental importância para se compreender a parte prática, portanto, nunca a despreze. Esse é um dos erros mais graves que as pessoas cometem. Qualquer atividade, por mais prática que seja, tem sempre um fundamento teórico que lhe orienta. Quer ver uma coisa? Quando damos uma simples caminhada estamos praticando uma série de atividades relacionadas a diversas ciências e suas teorias. Primeiro, temos que ter equilíbrio para ficarmos em pé; a Física explica isso, mas a Anatomia também está presente, não é? E a “ordem” para impulsionar os passos? Olha aí o nosso sistema nervoso, comandado pelo cérebro! E o impulso? Olha a Física de novo. E por que caminhamos eretos? A História e a Antropologia têm uma longa conversa para explicar isso.

Portanto, não esqueça nunca de que a teoria sempre acompanha a prática, e que ela ajuda na compreensão do que estamos fazendo e o porquê de estarmos fazendo.

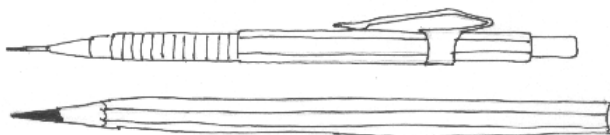
Leia os capítulos tantas vezes quanto achar necessário, até entender a mensagem. Tire as dúvidas com o professor, com colegas e em livros. Faça os exercícios, procurando entender a seqüência lógica da resolução. Leia os enunciados atentamente, organizando as idéias e visualizando a solução. Todas as construções e exercícios apresentam um roteiro de resolução, mas, tente primeiro obter a sua solução. Para isso, temos que ter domínio do assunto, o que só se consegue estudando. Repita as construções até conseguir um completo entendimento e clareza do traçado. E não desista. Nós apostamos no seu sucesso!



OS INSTRUMENTOS DE DESENHO

Para estudar e praticar o Desenho Geométrico que tal você conhecer os instrumentos necessários para por em prática tudo o vamos aprender para isto são necessários os seguintes instrumentos:

1) **Lápis ou lapiseira:** Apresentam internamente o grafite ou mina, que tem grau de dureza variável, classificado por letras, números ou a junção dos dois.

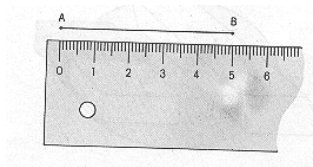


Classificação por números	Classificação por letras	Classif. por nº e letras
Nº 1 – Macio – Linha cheia Nº 2 – Médio – Linha média Nº 3 – Duro – Linha fina	B – Macio – Equivale ao grafite nº 1 HB – Médio – Equivale ao grafite nº 2 H – Duro – Equivale ao grafite nº 3	2B, 3B...até 6B – Muito macios 2H, 3H...até 9H – Muito duros

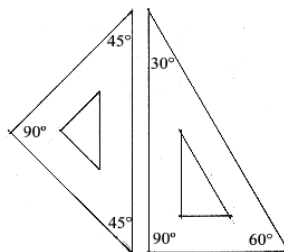
As lapiseiras apresentam graduação quanto à espessura do grafite, sendo as mais comumente encontradas as de número 0,3 – 0,5 – 0,7 e 1,0.

2) **Papel:** Blocos, cadernos ou folhas avulsas (papel ofício) de cor branca e sem pautas.

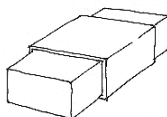
3) **Régua:** Em acrílico ou plástico transparente, graduada em cm (centímetros) e mm (milímetros)



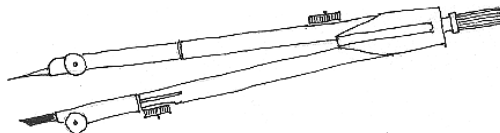
4) **Par de esquadros:** Em acrílico ou plástico transparente e sem graduação. O esquadros são destinados ao traçado e não para medir, o que deve ser feito com a régua. Um deles tem os ângulos de 90°, 45° e 45° e o outro os ângulos de 90°, 60° e 30°. Os esquadros formam um par quando, dispostos como na figura, têm medidas coincidentes.



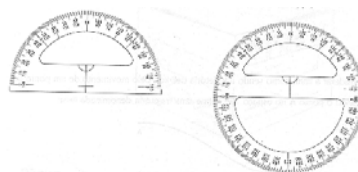
5) **Borracha:** Branca e macia, preferencialmente de plástico sintético. Para pequenos erros, usa-se também o lápis-borracha.



6) **Compasso:** Os fabricados em metal são mais precisos e duráveis. O compasso é usado para traçar circunferências, arcos de circunferências (partes de circunferência) e também para transportar medidas. Numa de suas hastes temos a ponta seca e na outra o grafite, que deve ser apontado obliquamente (em bisel). Ao abrimos o compasso, estabelecemos uma distância entre a ponta seca e o grafite. Tal distância representa o raio da circunferência ou arco a ser traçado.



7) **Transferidor:** Utilizado para medir e traçar ângulos, deve ser de material transparente (acrílico ou plástico) e podem ser de meia volta (180°) ou de volta completa (360°).



ATENÇÃO: É importantíssimo que você tenha todo esse material em mãos para possa realizar todas as construções corretamente. Serão as nossas “ferramentas de trabalho”.

Talvez você já esteja ansioso para começar, não é? Calma! Vamos começar nossos estudos com alguns conceitos teóricos necessários. Leia-os com atenção, pois serão a chave para uma perfeita compreensão das unidades. O ato de desenhar é um ato extremamente prático; no entanto, é imprescindível que tenhamos uma base teórica do assunto. Aliás, esta é uma regra geral em todo conhecimento: teoria e prática devem andar sempre lado a lado, não é mesmo?



1. DESENHO GEOMÉTRICO

Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Definir desenho geométrico;
- Compreender espaço geométrico;



Vamos começar nossos estudos refletindo um pouco sobre o significado de cada uma das palavras que compõem o título dessa unidade: **Desenho e Geometria**.

O Desenho é definido como a “expressão gráfica da forma”. Todas as coisas que conhecemos e que estamos habituados a ver, como os animais, as plantas, os móveis, as caixas, as casas, tudo, enfim, se apresenta aos nossos olhos como formas geométricas. Umas mais, outras menos definidas, mas, no fim das contas, são todas formas que podem ser associadas à formas geométricas. Quando desenhamos um objeto, estamos representando graficamente a sua forma, respeitando as proporções e medidas que definem tal objeto.

Já Geometria significa "medida da Terra". Tal expressão remonta do Antigo Egito, quando o faraó **Sesóstris** dividiu as terras entre os agricultores, demarcando os limites das áreas que cada um teria para plantar. Ocorre que as boas terras egípcias para o plantio eram as que ficavam próximas às margens do Rio Nilo, que fornecia a água necessária para a agricultura. Além disso, todos os anos, na época das cheias, as águas do rio inundavam as regiões próximas ao leito e, quando baixavam ao nível normal, as áreas, antes alagadas, estavam fertilizadas e tornavam-se ótimas para um novo plantio. Porém, após essa benéfica inundação, eram feitas novas demarcações das terras, a fim de redistribuí-las entre os agricultores. Desse modo, os egípcios tiveram que desenvolver métodos que permitissem realizar medidas das terras, isto é, eles realizavam **geometria**.

Com o passar dos tempos, o significado da palavra deixou de se limitar apenas às questões referentes à terra, passando a abranger o estudo das propriedades das figuras ou corpos geométricos.

Assim sendo, podemos definir o **Desenho Geométrico** como a "**expressão gráfica da forma, considerando-se as propriedades relativas à sua extensão, ou seja, suas dimensões**".

Essas dimensões são as três medidas que compõem o nosso mundo tridimensional: o comprimento, a largura e a altura (ou a espessura em alguns casos). Algumas formas apresentam apenas uma dessas dimensões: o comprimento. O ente geométrico que traduz essa forma é a linha. Quando um objeto apresenta duas dimensões, isto é, um comprimento e uma largura, o ente geométrico que o representa é o plano. Temos aí a idéia de área, de superfície. Finalmente, ao depararmos com objetos que apresentam as três dimensões, temos a idéia do volume.

Considerando agora as três dimensões como infinitas, chegamos a uma outra idéia: a da "extensão sem limites", ou seja, o espaço geométrico.

O Espaço Geométrico pode ser comparado à idéia tradicional do espaço cósmico infinito, ressaltando-se aqui que é sabido que outras teorias contestam esse modelo. No entanto, para a geometria tradicional fica valendo a velha idéia. É no Espaço Geométrico que se localizam os Entes Geométricos, que, organizados darão formato às figuras ou Corpos Geométricos.

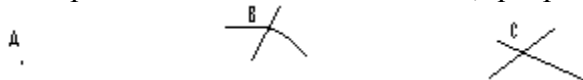
2. ENTES GEOMÉTRICOS

Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Identificar os entes geométricos;
- Descrever e representar os entes geométricos;

O entes geométricos são conceitos primitivos e não têm definição. É através de modelos comparativos que tentamos explica-los. São considerados como elementos fundamentais da Geometria, e são:

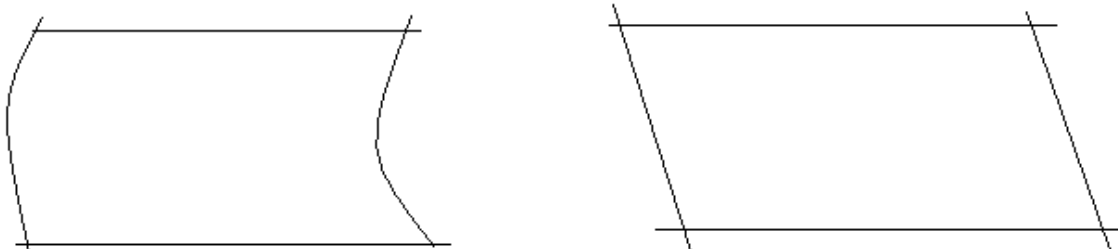
Ponto – Conforme já dito, não tem definição. Além disso, não tem dimensão. Graficamente, expressa-se o ponto pelo sinal obtido quando se toca a ponta do lápis no papel. É de uso representa-lo por uma letra maiúscula ou algarismos, em alguns casos. Sua representação também se dá pelo cruzamento de duas linhas, que podem ser retas ou curvas.



Linha – É o resultado do deslocamento de um ponto no espaço. Em desenho é expressa graficamente pelo deslocamento do lápis sobre o papel. A linha tem uma só dimensão: o comprimento. Podemos interpretar a linha como sendo a trajetória descrita por um ponto ao se deslocar.



O Plano – É outro conceito primitivo. Através de nossa intuição, estabelecemos modelos comparativos que o explicam, como: a superfície de um lago com sua águas paradas, o tampo de uma mesa, um espelho, etc. À esses modelos, devemos acrescentar a idéia de que o plano é infinito. O plano é representado, geralmente, por uma letra do alfabeto grego.



Reta – Pelas características especiais deste ente geométrico e sua grande aplicação em Geometria e Desenho, faremos seu estudo de forma mais detalhada a seguir.

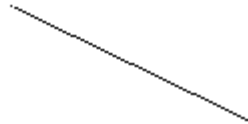
3. RETA

Ao final desta unidade, você estará apto a:

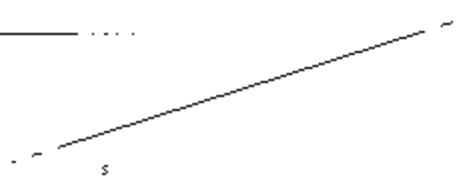
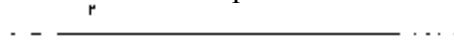
- Definir reta e semi-retas;
- Definir segmentos colineares e consecutivos;
- Identificar a posição de uma reta e a posição relativa de duas retas.



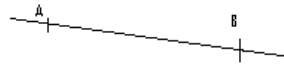
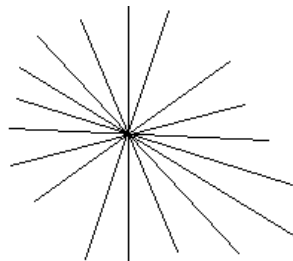
A reta não possui definição, no entanto, podemos compreender este ente como o “resultado do deslocamento de um ponto no espaço, sem variar a sua direção”.



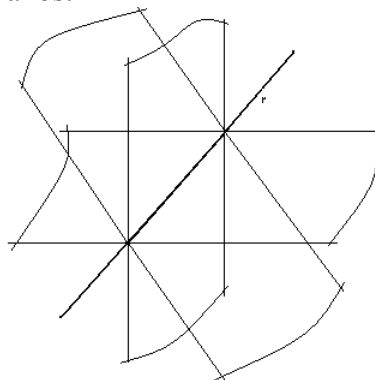
A reta é representada por uma letra minúscula e é infinita nas duas direções, isto é, devemos admitir que o ponto já vinha se deslocando infinitamente antes e continua esse deslocamento infinitamente depois.



Por um único ponto passam infinitas retas, enquanto que, por dois pontos distintos, passa uma única reta.



Por uma reta passam infinitos planos.



Da idéia de reta, originam-se outros elementos fundamentais para o Desenho Geométrico:

3.1. SEMI-RETA: É o deslocamento do ponto, sem variar a direção, mas tendo um ponto como origem. Portanto, a semi-reta é infinita em apenas uma direção. Um ponto qualquer, pertencente a uma reta, divide a mesma em duas semi-retas.



Figura 1

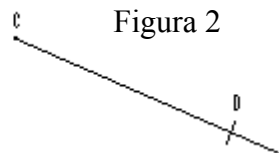
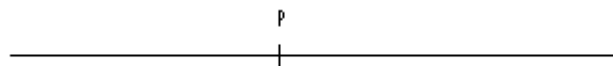


Figura 2

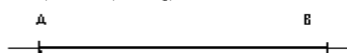
Semi-reta de origem no ponto A e que passa pelo ponto B (figura 1)

Semi-reta de origem no ponto C e que passa pelo ponto D (figura 2)

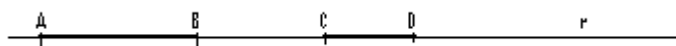
Um ponto qualquer, pertencente a uma reta, divide a mesma em duas semi-retas.



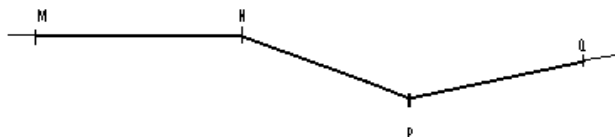
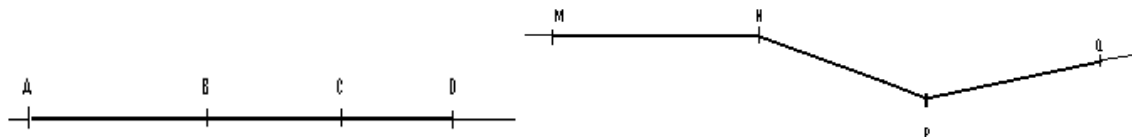
3.2. SEGMENTO DE RETA – É a porção de uma reta, limitada por dois de seus pontos. O segmento de reta é, portanto, limitado e podemos atribuir-lhe um comprimento. O segmento é representado pelos dois pontos que o limitam e que são chamados de extremidades. Ex: segmento AB, MN, PQ, etc.



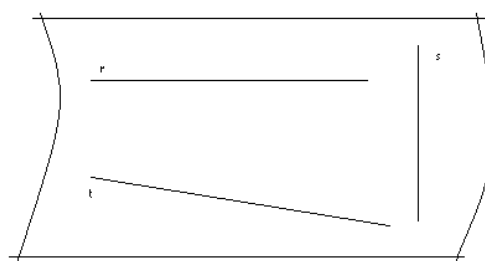
3.3. SEGMENTOS COLINEARES – São segmentos que pertencem à mesma reta, chamada de reta suporte.



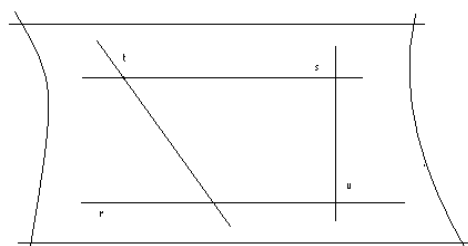
3.4 - SEGMENTOS CONSECUTIVOS – São segmentos cuja extremidade de um coincide com a extremidade de outro.



3.5. RETAS COPLANARES – São retas que pertencem ao mesmo plano.



3.6 - RETAS CONCORRENTES – São retas coplanares que concorrem, isto é, cruzam-se num mesmo ponto; sendo esse ponto comum às duas retas.



3.7 - POSIÇÕES DE UMA RETA:

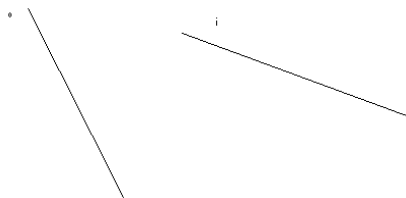
a) Horizontal: É a posição que corresponde à linha do horizonte marítimo.



b) Vertical: É a posição que corresponde à direção do fio de prumo (instrumento utilizado pelo pedreiro, com a finalidade de alinhar uma parede ou muro. Consiste em um barbante, contendo numa das extremidades um peso em forma de pingente, que, pela ação da gravidade, dá a direção vertical).

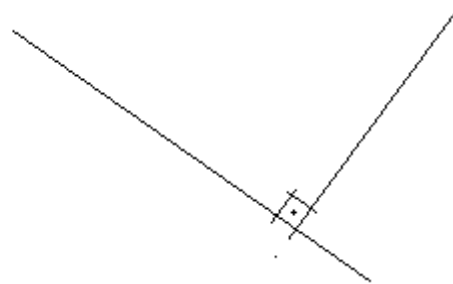
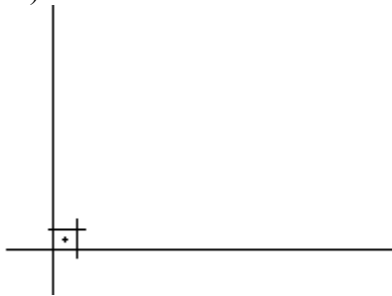


c) Obliqua ou Inclinada – É a exceção das duas posições anteriores, quer dizer, a reta não está nem na posição horizontal, nem na posição vertical.

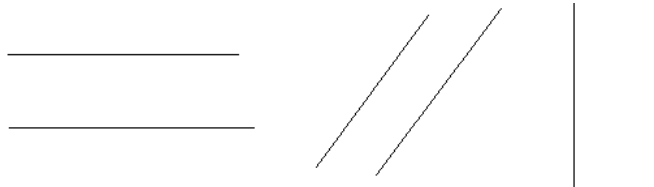


3.8 - POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

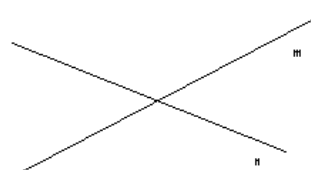
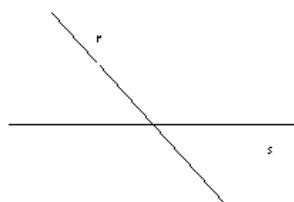
a) Perpendiculares – São retas que se cruzam formando um ângulo reto, ou seja, igual a 90° (noventa graus).



b) Paralelas – São retas que conservam entre si sempre a mesma distância, isto é, não possuem ponto em comum.



c) Oblíquas ou Inclinadas – São retas que se cruzam formando um ângulo qualquer, diferente de 90° .



4. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Traçar retas perpendiculares;
- Traçar retas paralelas;
- Dividir um segmento de reta em segmentos proporcionais.

4.1. TRAÇADO DE PERPENDICULARES



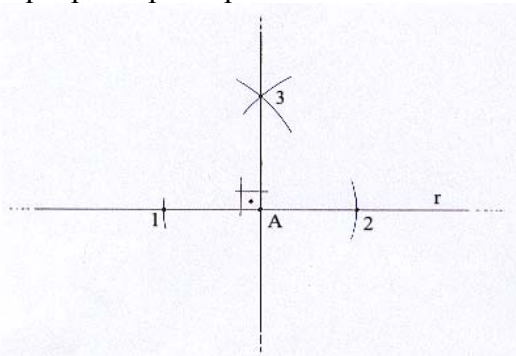
a) Perpendicular que passa por um ponto qualquer, pertencente a uma reta

Seja a reta r e o ponto A , pertencente à mesma

1) Centro (ponta seca do compasso) em A , abertura qualquer, cruza-se a reta com dois arcos, um para um lado e o outro para o outro lado, gerando os pontos 1 e 2.

2) Centro em 1 e 2 com a mesma abertura, suficiente para obter o cruzamento desses dois arcos, gerando o ponto 3.

3) A perpendicular será a reta que passa pelos pontos A e 3.



Comentário: Ao centrarmos no ponto A e aplicarmos uma abertura no compasso, estamos estabelecendo uma distância entre a ponta seca e a ponta que vai descrever o arco. Tal distância representa o raio desse arco, que é uma parte de uma circunferência. As distâncias (raios) $A1$ e $A2$ são, portanto, iguais.

Quando centrarmos em 1 e 2, com a mesma abertura e, ao fazermos o cruzamento, determinamos o ponto 3, temos que as distâncias 13 e 23 são iguais entre si. A combinação dos pares iguais de distâncias ($A1=A2$ e $13=23$) é a “prova dos nove” da nossa construção.

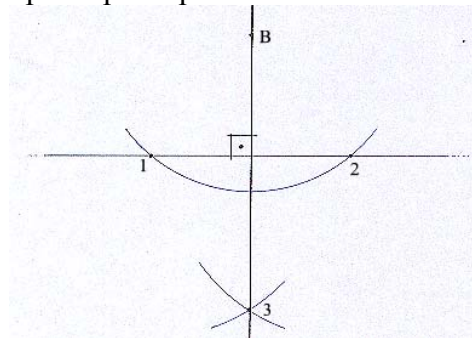
b) Perpendicular que passa por um ponto não pertencente a uma reta

Seja a reta r e o ponto B , não pertencente à mesma

1) Centro em B , abertura qualquer, suficiente para traçar um arco que corte a reta em dois pontos: 1 e 2.

2) Centro em 1 e 2, com a mesma abertura, cruzam-se os arcos, obtendo-se o ponto 3.

3) A perpendicular é a reta que passa pelos pontos B e 3.



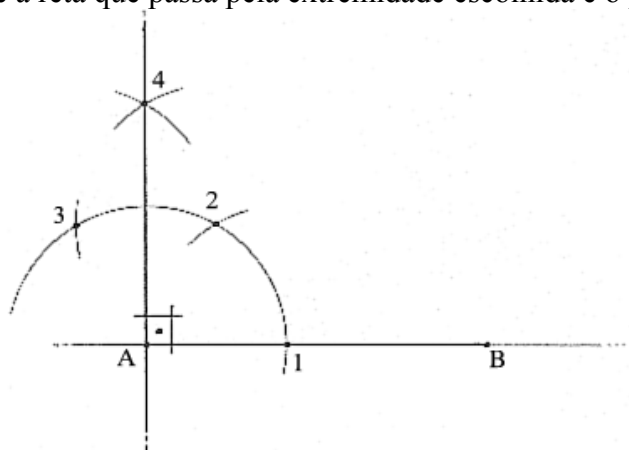
Comentário: Os raios B1 e B2 são iguais, da mesma maneira que 13 e 23. Daí os pontos B e 3 definem nossa perpendicular.

c) Perpendicular que passa pela extremidade de um segmento de reta

1º Método:

Seja o segmento de reta AB

- 1) Centro em uma das extremidades, abertura qualquer, traça-se o arco que corta o segmento, gerando o ponto 1.
- 2) Com a mesma abertura, e com centro em 1, cruza-se o primeiro arco, obtendo-se o ponto 2.
- 3) Centro em 2, ainda com a mesma abertura, cruza-se o primeiro arco, obtendo-se o ponto 3.
- 4) Continuando com a mesma abertura, centra-se em 2 e 3, cruzando estes dois arcos e determinando o ponto 4.
- 5) Nossa perpendicular é a reta que passa pela extremidade escolhida e o ponto 4.

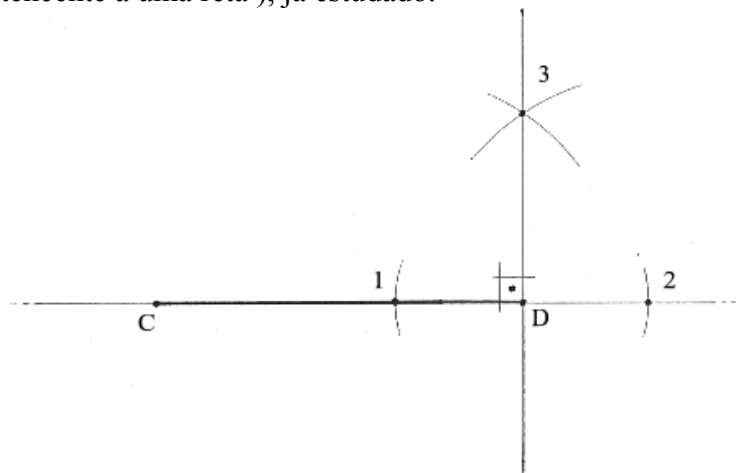


Comentário: Nesta construção, mantemos a mesma abertura (raio) do compasso durante todo o processo. Dessa forma, as distâncias entre a extremidade escolhida e os pontos 2 e 3 são iguais, assim como 24 e 34. A igualdade entre todas as distâncias justifica o traçado.

Note ainda que a extremidade escolhida e os pontos 2, 4 e 3 formam um losango, figura geométrica que estudaremos mais adiante.

2º Método:

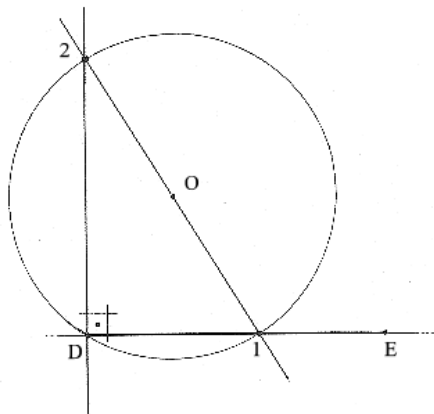
Basta lembrar que todo segmento de reta é uma parte limitada de uma reta, que é infinita. Assim sendo, podemos prolongar o segmento em qualquer uma de suas extremidades, raciocinando-se então como se estivéssemos trabalhando com uma reta e a extremidade do segmento como um ponto que pertence a esta mesma reta, o que nos leva ao caso a (perpendicular que passa por um ponto qualquer, pertencente a uma reta), já estudado.



3º Método:

Seja o segmento DE

- 1) Numa região próxima à extremidade escolhida (D, por exemplo) assinala-se o ponto O.
- 2) Centro em O, raio OD, traça-se uma circunferência que cruza o segmento, determinando o ponto 1.
- 3) Traça-se a reta que passa em 1 e em O, e que corta a circunferência em 2.(Note que o segmento 12 representa o diâmetro da circunferência).
- 4) A perpendicular é a reta que passa pela extremidade escolhida (D) e o ponto 2.

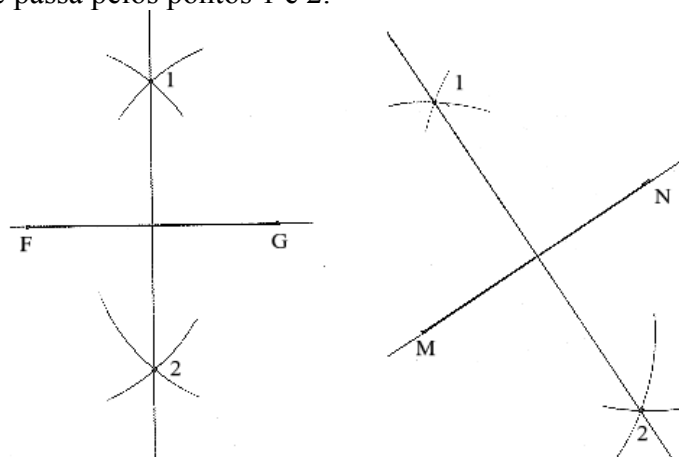


Comentário: Os pontos D, 1 e 2 formam um triângulo. O lado 12 deste triângulo é também o diâmetro da circunferência que o circunscreve. O ponto D é um ponto que pertence à circunferência. Portanto, nosso triângulo é retângulo, o que torna válida a solução.

d) Perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento de reta (Mediatriz)

- 1) Centro em uma das extremidades, com abertura maior que a metade do segmento, traça-se o arco que percorre as regiões acima e abaixo do segmento.
- 2) Com a mesma abertura, centra-se na outra extremidade e cruza-se com o primeiro arco, nos pontos 1 e 2.

A Mediatriz é a reta que passa pelos pontos 1 e 2.



Comentário: As distâncias entre as extremidades do segmento e os pontos 1 e 2 são todas iguais, fazendo com que a reta que passa por 1 e 2, além de ser perpendicular, cruze o mesmo exatamente no seu ponto médio. Portanto, nossa mediatriz tem uma propriedade: dividir um segmento em duas partes iguais.

4.2. TRAÇADO DE PARALELAS

a) Caso geral: Paralela que passa por um ponto qualquer não pertencente a uma reta

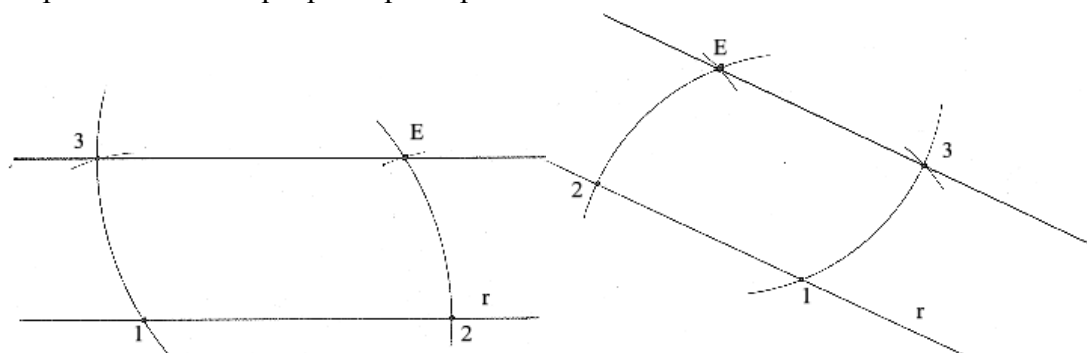
Sejam a reta r e o ponto E , fora da reta.

- 1) Centro em E , raio (abertura) qualquer, traça-se o arco que cruza a reta em 1.
- 2) Com a mesma abertura, inverte-se a posição, ou seja, centro em 1, raio $1E$, traça-se o arco que vai cruzar a reta no ponto 2.

Com a ponta seca do compasso em 2, faz-se abertura até E , medindo-se, portanto esse arco.

- 4) Transporta-se, então, a medida do arco $2E$ a partir de 1, sobre o primeiro arco traçado, obtendo-se o ponto 3.

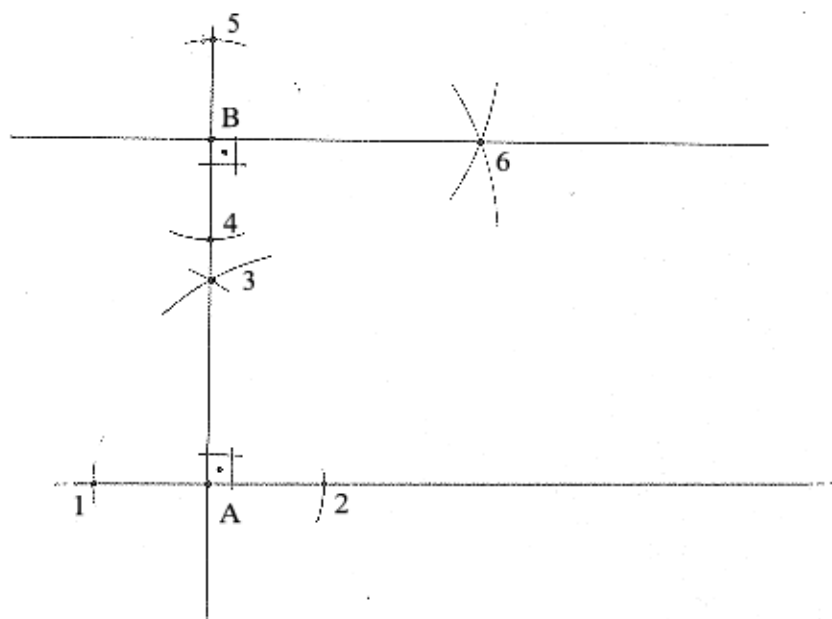
- 5) Nossa paralela é a reta que passa pelos pontos 3 e E .



b) Traçado de uma paralela a uma distância determinada de uma reta

Neste caso, temos que primeiramente estabelecer a distância pretendida, o que equivale dizer que temos que determinar a menor distância entre as retas, então:

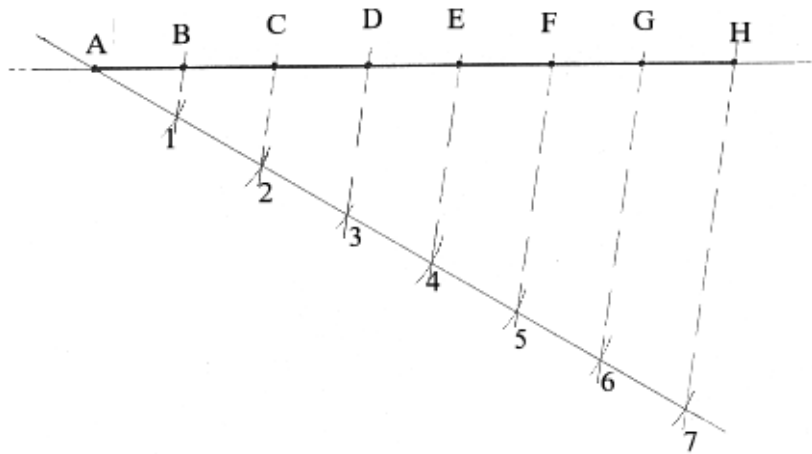
- 1) Por um ponto qualquer (A) da reta, levanta-se um perpendicular (vide o caso específico no estudo das perpendiculares).
- 2) Sobre a perpendicular mede-se a distância determinada (5 cm), a partir do ponto escolhido (A), obtendo-se o segmento de reta AB , igual a 5 cm.
- 3) Procede-se, então, como no caso anterior, pois temos, agora, uma reta e um ponto (B), fora desta, ou:
- 4) Se, pelo ponto B , traçarmos uma perpendicular à reta que contém esse segmento, ela será paralela à primeira reta.



4.3. DIVISÃO DE UM SEGMENTO DE RETA EM UM NÚMERO QUALQUER DE PARTES IGUAIS

Seja o segmento de reta AH. Vamos dividi-lo em 7 partes iguais.

- 1) Por uma das extremidades, traçamos uma reta com inclinação aproximada de 30° .
- 2) Atribui-se uma abertura no compasso e aplica-se essa distância sobre a reta inclinada o número de vezes em que vamos dividir o segmento (7 vezes).
- 3) Enumeramos as marcações de distâncias a partir da extremidade escolhida.
- 4) A última marcação (nº 7) é unida à outra extremidade.
- 5) Através do deslizamento de um esquadro sobre o outro, passando pelas demais divisões, mas sempre alinhado pela última divisão (no nosso exemplo a de nº 7), o segmento é dividido em partes iguais.

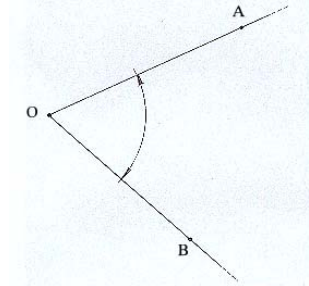


5. ÂNGULO

Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Construir e medir ângulos com o transferidor;
- Classificar ângulos quanto a abertura e a posição;
- Construção de ângulos com o compasso.

5.1. DEFINIÇÃO: É a região do plano limitada por duas semi-retas distintas, de mesma origem.



5.2. ELEMENTOS:

- Vértice: É o ponto de origem comum das duas semi-retas.
- Lado: Cada uma das semi-retas.
- Abertura: É a região compreendida entre as duas semi-retas. Ela define a região angular, que é a região que delimita o próprio ângulo.

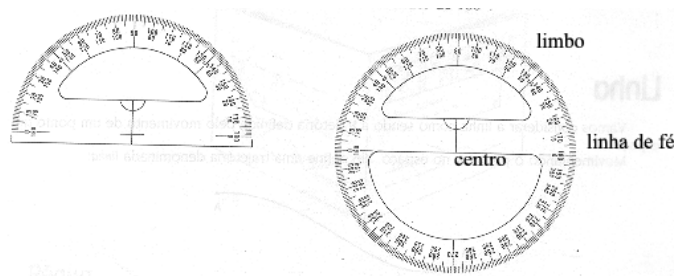
5.3. REPRESENTAÇÃO: $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA}$, $\hat{O}$, ou ainda uma letra grega.

5.4. MEDIDA DE ÂNGULOS: A unidade de medida mais usada para medir ângulos é o grau, cujo símbolo é $^\circ$. Um grau corresponde à divisão da circunferência em 360 partes iguais. Seus submúltiplos são: o minuto e o segundo, cujas relações são: $1^\circ = 60'$ e $1' = 60''$. Os ângulos são medidos através de um instrumento chamado transferidor.

5.5. CONSTRUÇÃO E MEDIDA DE ÂNGULOS COM O TRANSFERIDOR:

O transferidor pode ser de meia volta (180°) ou de volta completa (360°) e é composto dos seguintes elementos:

- Graduação ou limbo: corresponde à circunferência ou semicircunferência externa, dividida em 180 ou 360 graus.
- Linha de fé: segmento de reta que corresponde ao diâmetro do transferidor, passando pelas graduações 0° e 180° .
- Centro: corresponde ao ponto médio da linha de fé.



Para traçarmos ou medirmos qualquer ângulo devemos:

- a) Fazer coincidir o centro do transferidor com o vértice do ângulo.
- b) Um dos lados do ângulo deve coincidir com a linha de fé, ajustado à posição 0° .
- c) A contagem é feita a partir de 0° até atingir a graduação que corresponde ao outro lado (caso da medição) ou valor que se quer obter (caso da construção).

d) Neste último caso, marca-se um ponto de referência na graduação e traça-se o lado, partindo do vértice e passando pelo ponto.

e) Completa-se o traçado com um arco com centro no vértice e cortando os dois lados com as extremidades em forma de setas. Então, escreve-se o valor do ângulo neste espaço, que corresponde à sua abertura.

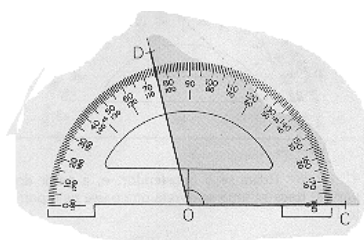


Obs: Este último passo (item e) é de suma importância, pois indica a região que representa o ângulo (região angular).

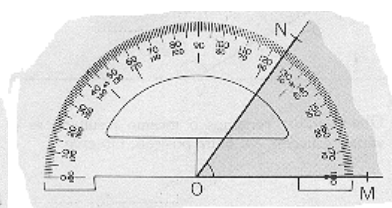
Veremos em seguida alguns exemplos de medidas de ângulos com o transferidor. Observe que o processo é o mesmo, tanto para a medição, quanto para a construção e, com o transferidor, podemos construir ou medir qualquer ângulo, qualquer que seja a sua abertura.

Vejamos então os exemplos e em seguida você pode criar os seus próprios, observando os mesmos procedimentos. Vamos lá, então !

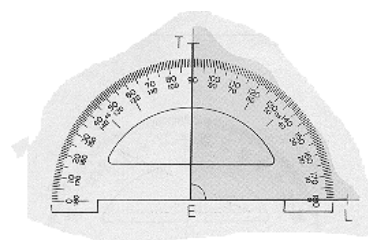
a) Ângulo de 105°



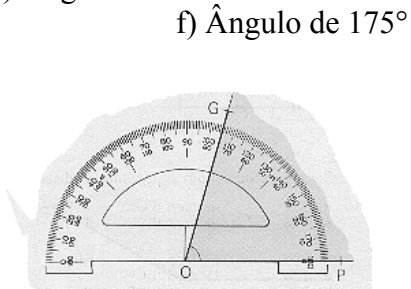
b) Ângulo de 55°



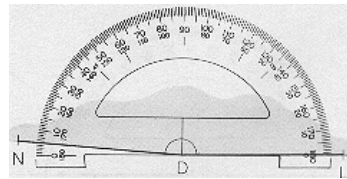
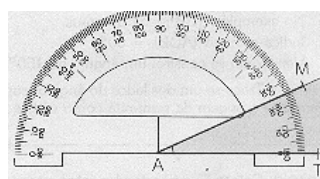
c) Ângulo de 90°



d) Ângulo de 75°



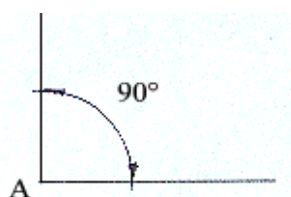
e) Ângulo de 25°



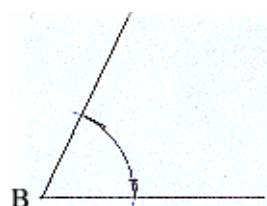
5.6. CLASSIFICAÇÃO:

5.6.1. Quanto à abertura dos lados:

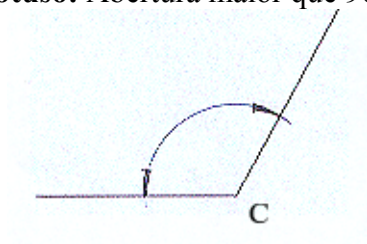
a) **Reto:** Abertura igual a 90°



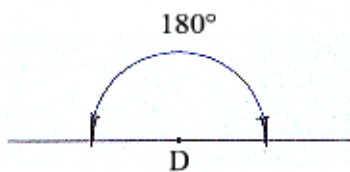
b) **Agudo:** Abertura menor que 90°



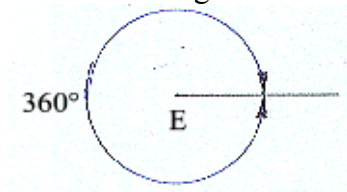
c) **Obtuso:** Abertura maior que 90°



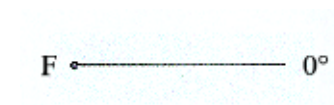
d) **Raso:** Abertura igual a 180°



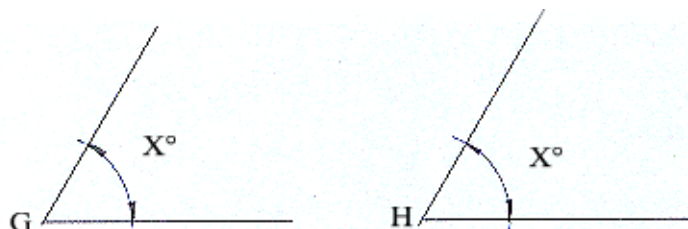
e) **Pleno:** Abertura igual a 360°



f) **Nulo:** Abertura igual a 0°

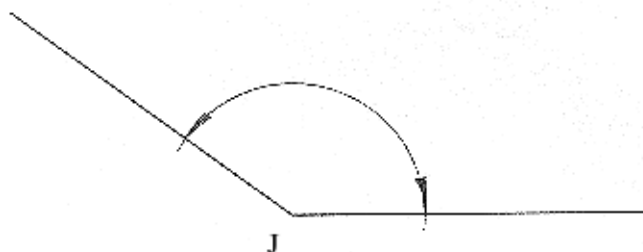


g) **Congruentes:** Dois ou mais ângulos são congruentes quando têm aberturas iguais.

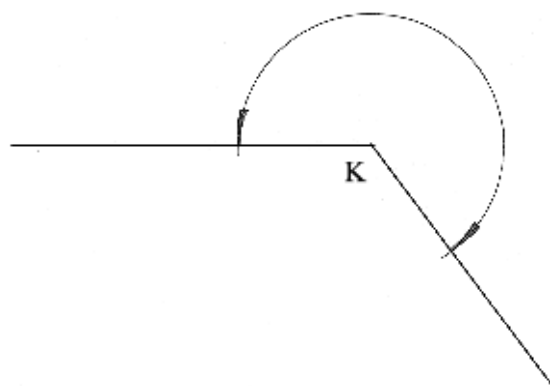


5.6.2 - Quanto à posição que ocupam:

a) **Ângulo Convexo:** Abertura maior que 0° e menor que 180°

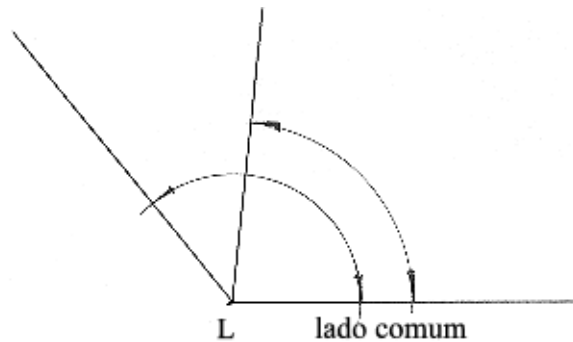


b) **Ângulo Côncavo:** Abertura maior que 180° e menor que 360°

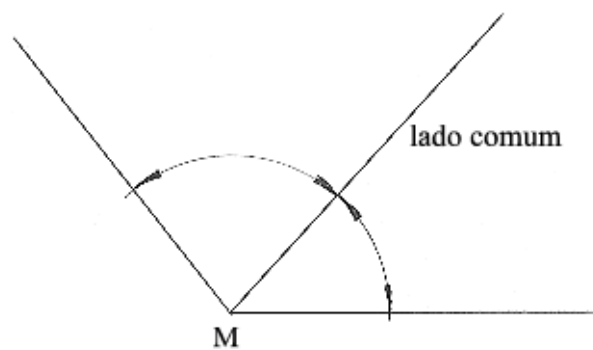


5.7. POSIÇÕES RELATIVAS DOS ÂNGULOS:

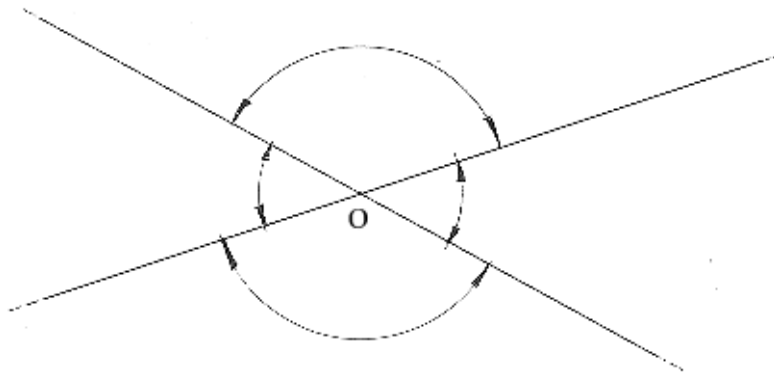
a) **Ângulos consecutivos:** Quando possuem em comum o vértice e um dos lados.



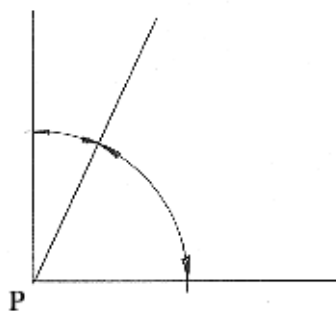
b) **Ângulos adjacentes:** São ângulos consecutivos que não têm pontos internos comuns.



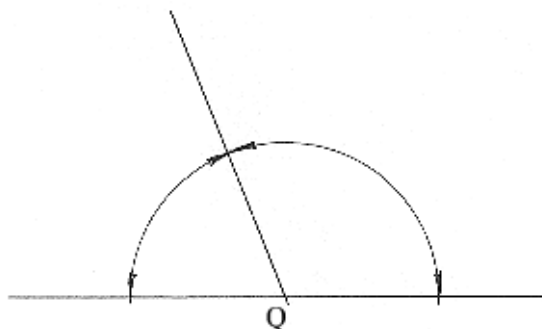
c) **Ângulos opostos pelo vértice:** Ângulos congruentes cujos lados são semi-retas opostas.



d) **Ângulos complementares:** Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90° .



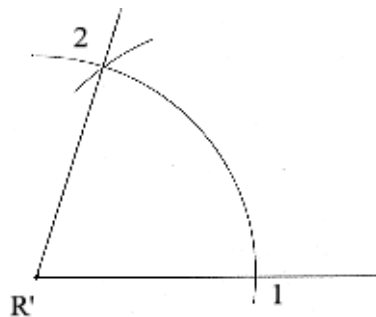
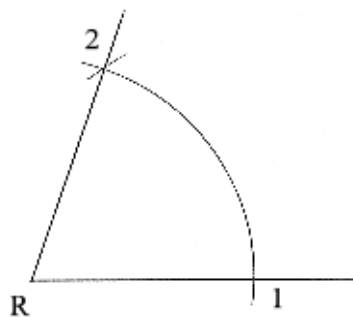
e) Ângulos suplementares: Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180° .

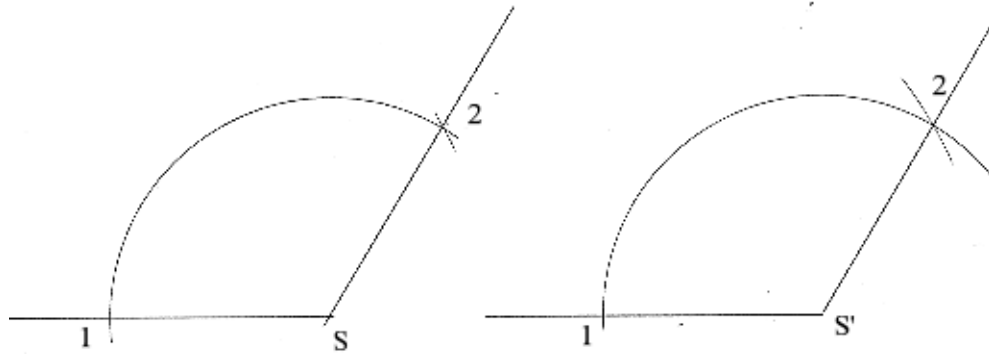


5.8. TRANSPORTE DE ÂNGULOS: Transportar um ângulo significa construir um ângulo congruente a outro, utilizando-se o compasso:

- Centra-se no vértice do ângulo que se vai transportar e, com abertura qualquer descreve-se um arco que corta os dois lados do ângulo, gerando os pontos 1 e 2.
- Traça-se um lado do ângulo a ser construído, definindo o seu vértice.
- Com a mesma abertura do compasso e centro no vértice do segundo ângulo, descreve-se um arco, igual ao primeiro e que corta o lado já traçado, definindo um ponto que corresponde ao ponto 1 do primeiro ângulo.
- Volta-se ao primeiro ângulo e mede-se a distância entre os pontos 1 e 2, com o compasso.
- Aplica-se esta distância no segundo ângulo a partir do ponto correspondente ao ponto 1 sobre o arco já traçado, definindo o ponto correspondente ao ponto 2.
- A partir do vértice e passando pelo ponto 2, traça-se o outro lado do ângulo.

Comentário: note que realizamos, nesta construção, dois transportes de distâncias. Primeiro a distância que correspondia ao arco no primeiro ângulo. Depois, a que correspondia à distância entre os pontos 1 e 2. Tudo isso feito com a utilização do compasso.

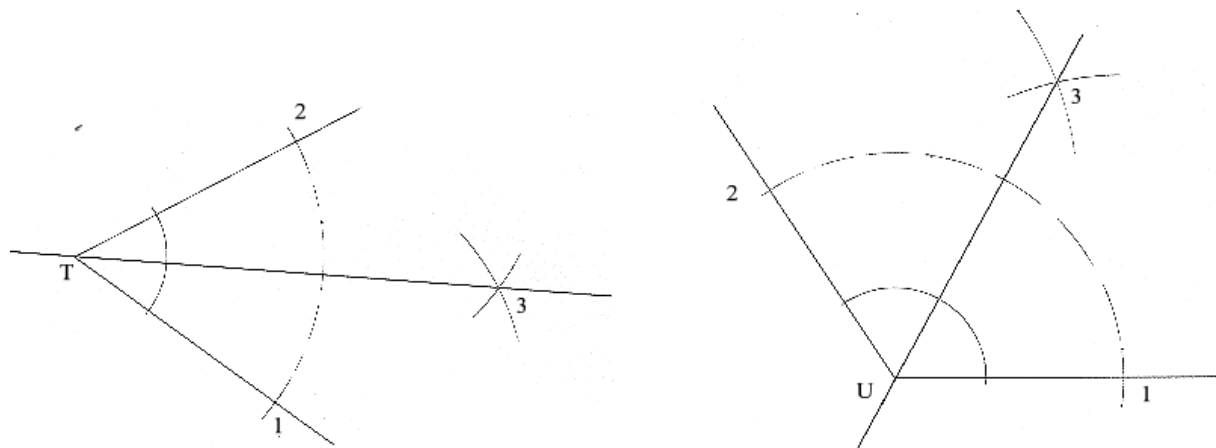




5.9. BISSETRIZ DE UM ÂNGULO: É a reta que, passando pelo vértice, divide um ângulo em duas partes iguais.

Traçado da bissetriz:

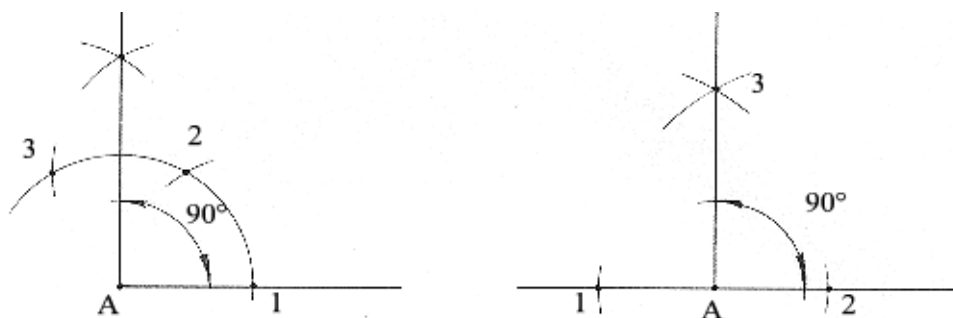
- Ponta seca no vértice do ângulo, abertura qualquer, descreve-se um arco que corta os dois lados do ângulo, definindo os pontos 1 e 2.
- Centro em 1 e 2, com a mesma abertura; cruzam-se os arcos, gerando o ponto 3.
- A bissetriz é a reta que passa pelo vértice e pelo ponto 3.



5.10. CONSTRUÇÃO DE ÂNGULOS COM O COMPASSO:

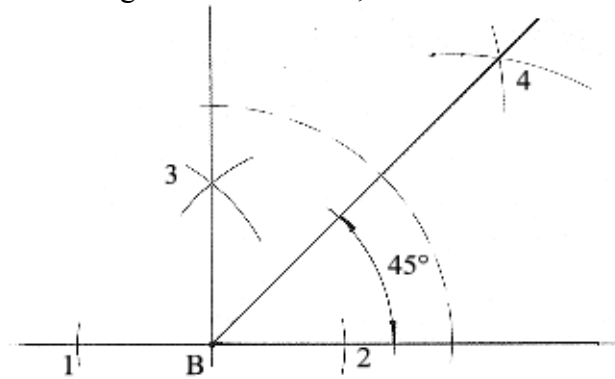
a) 90°

Traça-se um lado, definindo-se o vértice e, por este, levanta-se uma perpendicular. Temos, então o ângulo de 90° .

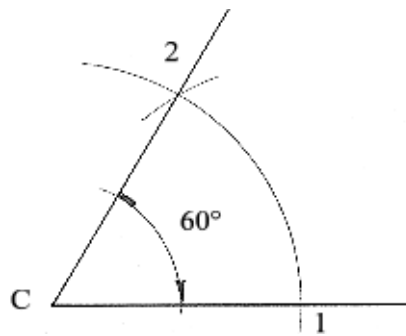


b) 45°

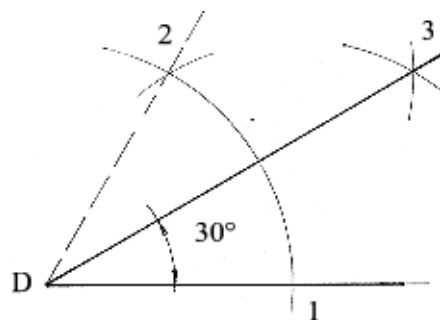
Traça-se um ângulo de 90° e em seguida sua bissetriz, obtendo-se assim duas partes de 45° .

**c) 60°**

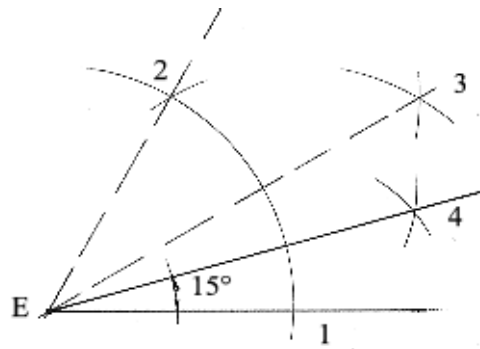
Traça-se um lado, posicionando-se o vértice. Centro no vértice, abertura qualquer, traça-se um arco que corta o lado já traçado, definindo o ponto 1. Centro em 1, com a mesma abertura, cruza-se o arco já traçado, obtendo-se o ponto 2. Partindo do vértice e passando pelo ponto 2, traçamos o outro lado do ângulo.

**d) 30°**

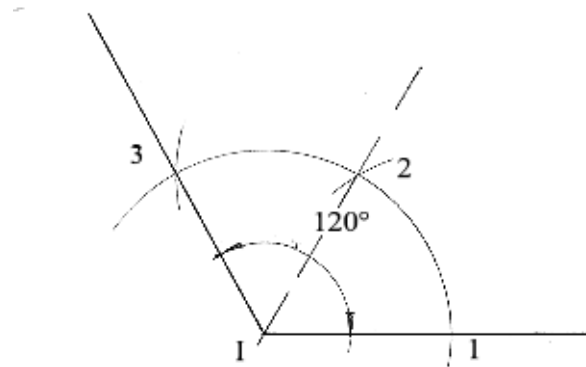
Traça-se um ângulo de 60° e em seguida a sua bissetriz.

**e) 15°**

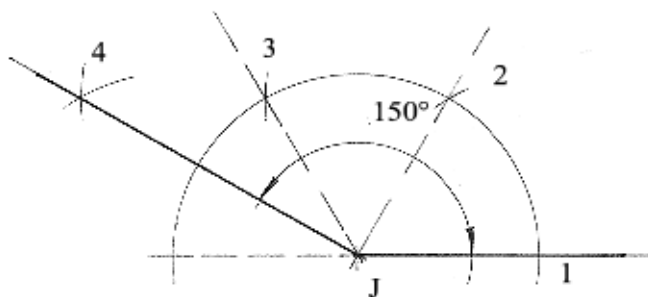
Traça-se um ângulo de 60° e em seguida a sua bissetriz, obtendo-se 30° . Traçamos, então a bissetriz de 30° , chegando aos 15° .

**f) 120°**

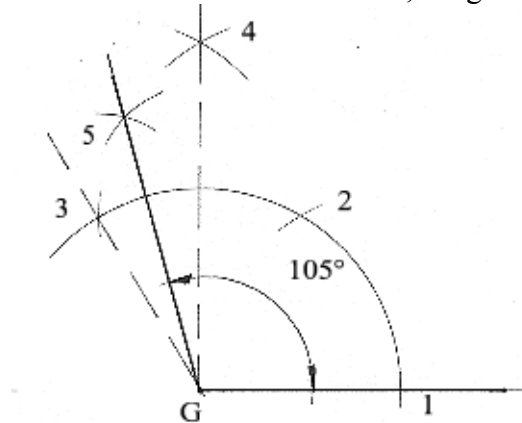
Traça-se um lado, posicionando-se o vértice. Centro no vértice, abertura qualquer, traça-se um arco que corta o lado já traçado, definindo o ponto 1. Centro em 1, com a mesma abertura, cruza-se o arco já traçado, obtendo-se o ponto 2. Centro em 2, ainda com a mesma abertura, cruza-se o arco, obtendo-se 3. Partindo do vértice e passando pelo ponto 3, traça-se o outro lado do ângulo.

**g) 150°**

Procede-se como no traçado do ângulo de 120°, até definir o ponto 3. Com centro em 3 e ainda com a mesma abertura sobre o mesmo arco obtém-se o ponto 4. Este ponto (4), unido ao vértice, forma 180°. Como já vimos, o ponto 3 e o vértice formam 120°; logo, entre 3 e 4, temos 60°. Traçando-se a bissetriz entre 3 e 4, obteremos 30° que, somados aos 120°, nos darão os 150°.

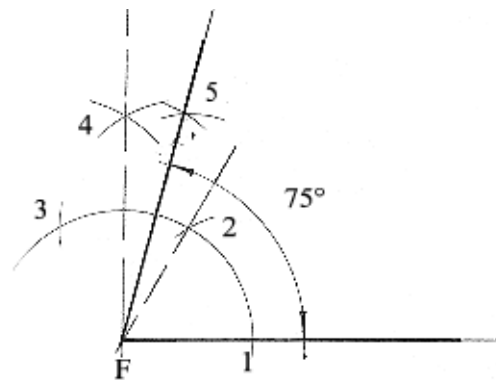
**h) 105°**

Já vimos que o traçado de 120° é como se traçássemos 60° mais 60° . Pois bem; um desses 60° , pelo traçado da bissetriz pode ser dividido em dois de 30° . E, de dois de 30° , podemos obter quatro de 15° . Assim, subtraindo-se um desses 15° de 120° , chegamos a 105° .



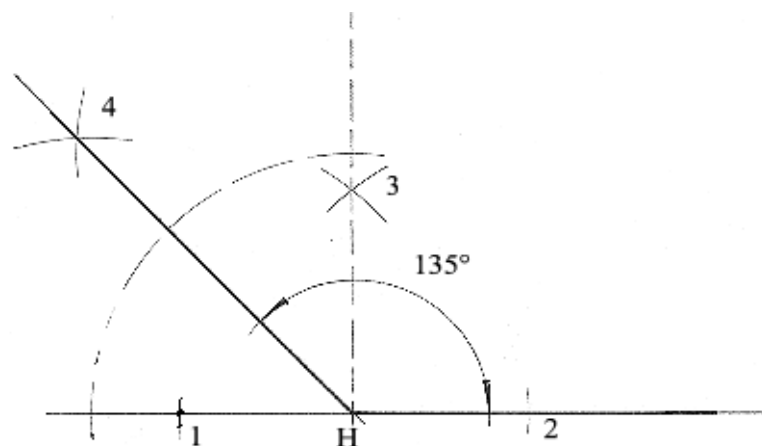
i) 75°

Pelo mesmo raciocínio anterior. Só que agora somamos 15° a 60° , obtendo-se 75° .



j) 135°

Um ângulo de 45° , adjacente a um ângulo de 90° totalizará 135° .

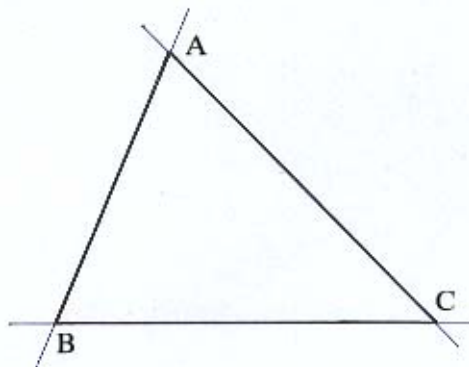


6. TRIÂNGULOS

Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Definir e classificar triângulos;
- Traçar as linhas notáveis dos triângulos;
- Determinar as interseções das linhas notáveis dos triângulos.

6.1. DEFINIÇÃO: São os polígonos de três lados.



6.2. ELEMENTOS:

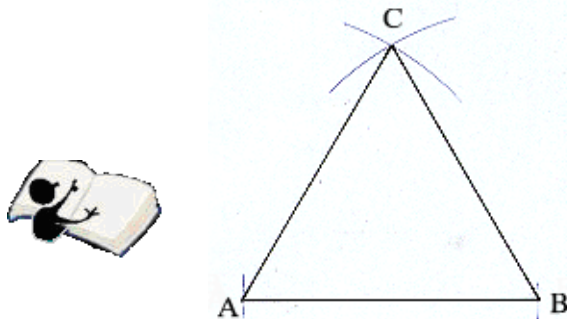
- Lados: AB, BC e AC
- Vértices: A, B e C
- Ângulos: $\hat{A}$, B e C



6.3. CLASSIFICAÇÃO:

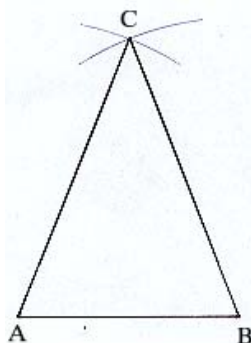
6.3.1. Quanto aos lados:

a) Equilátero: É o triângulo que tem os três lados iguais e três ângulos de 60° .

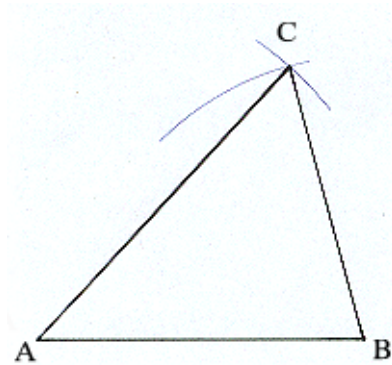


b) Isósceles: É o triângulo que tem dois lados iguais e um diferente, chamado de base.

Obs: A rigor, qualquer lado pode ser chamado de base do triângulo. Geralmente, chamamos de base ao lado que traçamos na posição horizontal, o que não é uma regra geral. No entanto, no triângulo isósceles, essa denominação identifica o lado diferente.

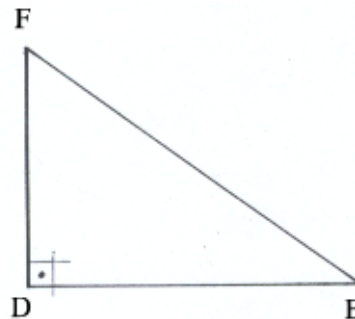


c) Escaleno: É o triângulo que tem os três lados e os três ângulos diferentes.

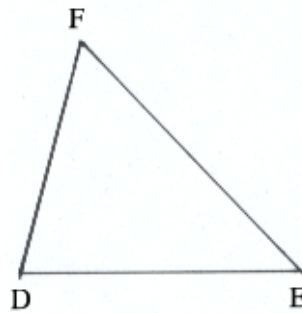


6.3.2. Quanto aos ângulos:

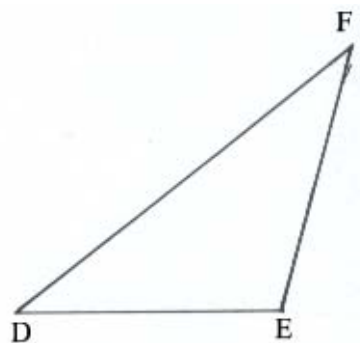
a) Triângulo retângulo: É o triângulo que possui um ângulo reto.



b) Triângulo acutângulo: É o triângulo que possui os três ângulos agudos (menores que 90°).



c) Triângulo obtusângulo: É o triângulo que tem um ângulo obtuso (maior que 90°).



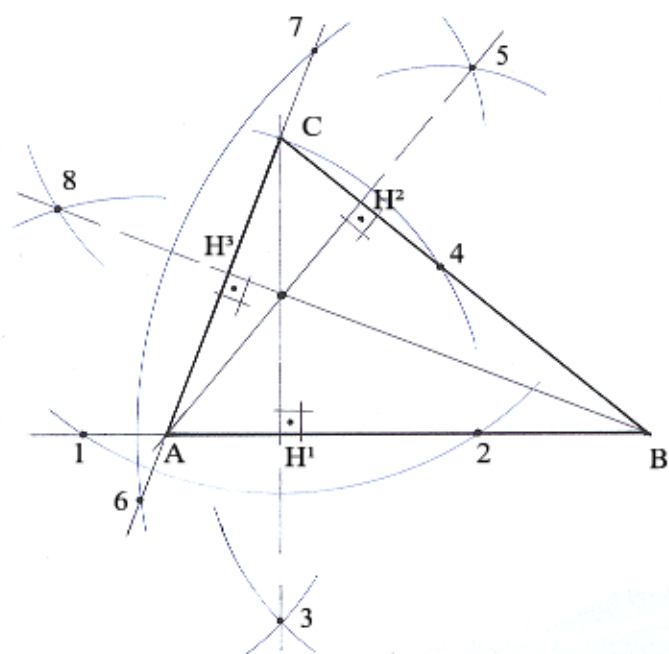
6.4. LINHAS NOTÁVEIS DOS TRIÂNGULOS: (também chamadas de cevianas dos triângulos)

a) Altura: É a distância entre um vértice e o lado oposto. Entenda-se que uma distância é tomada em linha reta, partindo-se de um ponto (vértice) até um segmento de reta (lado do triângulo) em posição perpendicular (entre a altura e o lado). As alturas cruzam-se num ponto comum chamado **Ortocentro**.



Como os triângulos possuem três lados e três vértices, teremos, portanto, três alturas por triângulo. Para as traçarmos, consideraremos que cada lado do triângulo é um segmento, que pertence a uma reta suporte e cada vértice é um ponto que não pertence à esta reta, aplicando-se, então, o segundo caso do traçado de perpendiculares (perpendicular que passa por um ponto não pertencente a uma reta). Veremos também que, para cada formato ou classificação de triângulos o ortocentro (ponto de encontro) apresentar-se-á de maneira diferente, sendo:

Em triângulos acutângulos: o ortocentro estará no interior do triângulo.

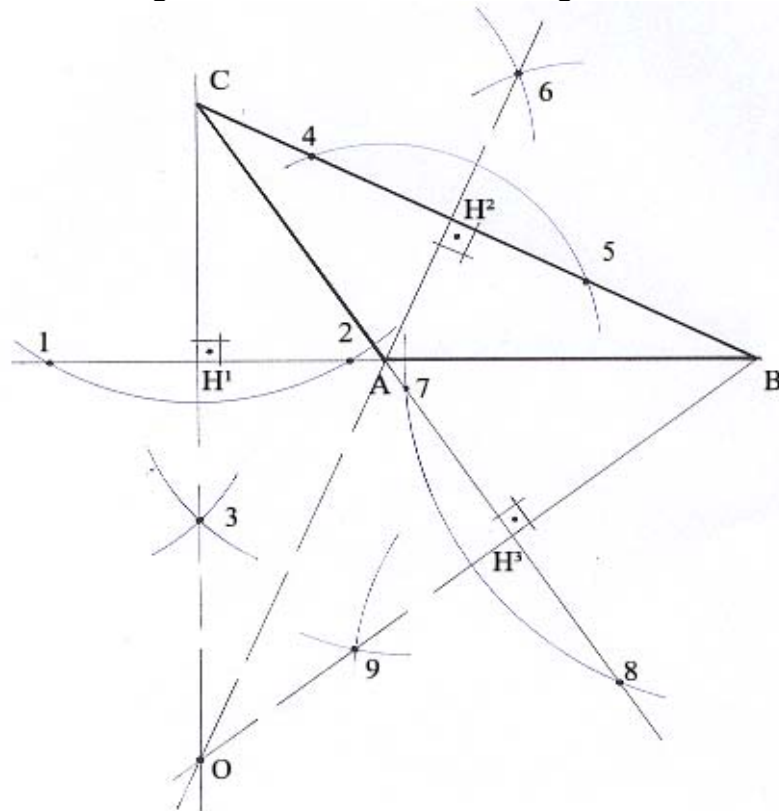


Observe que traçamos primeiro a altura relativa ao lado AB, centrando em C e descrevendo o arco que definiu 1, no prolongamento de AB e 2 no próprio segmento AB. Com centro em 1 e 2, definimos 3 e a altura CH^1 .

Depois, traçamos a altura relativa a BC, centrando em A e traçando o arco que aproveita o próprio ponto C e define o ponto 4, sobre BC. Com centro em C e 4, definimos 5 e traçamos a altura AH^2 .

Com centro em B, definimos 6 e 7, sobre os prolongamentos de AC e, com centro em 6 e 7, obtivemos o ponto 8 e traçamos a altura BH^3 .

Em triângulos obtusângulos: o ortocentro estará em região exterior ao triângulo.

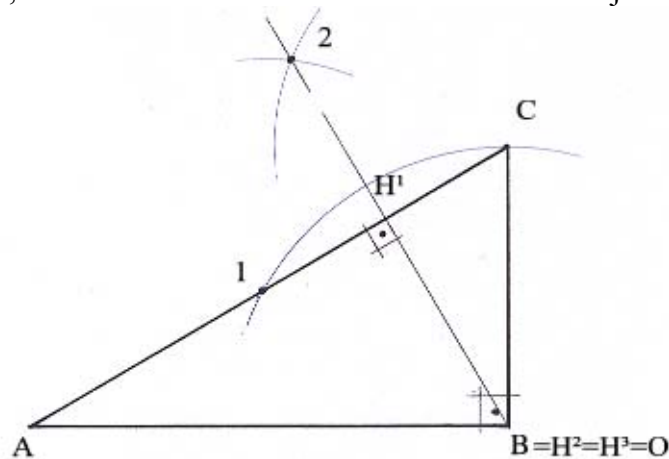


Note, neste caso, que prolongamos o lado AB, centramos em C, traçamos o arco que definiu 1 e 2, sobre o prolongamento; centramos em 1 e 2, com a mesma abertura, determinando 3 e traçamos a altura CH^1 .

Para o traçado da altura relativa ao lado BC o centro foi em A, traçando-se o arco que gerou 4 e 5, para, em seguida definir 6 e o traçado da altura AH^2 .

Finalmente, para o traçado da altura relativa ao lado AC, o centro foi em B, definindo 7 e 8 sobre o prolongamento de AC e, depois definindo 9, para o traçado da altura BH^3 . O ortocentro é resultado do cruzamento do prolongamento das três alturas. Lembre sempre que altura é uma distância, portanto tem uma medida, que corresponde a um segmento de reta, que pertence a uma reta suporte.

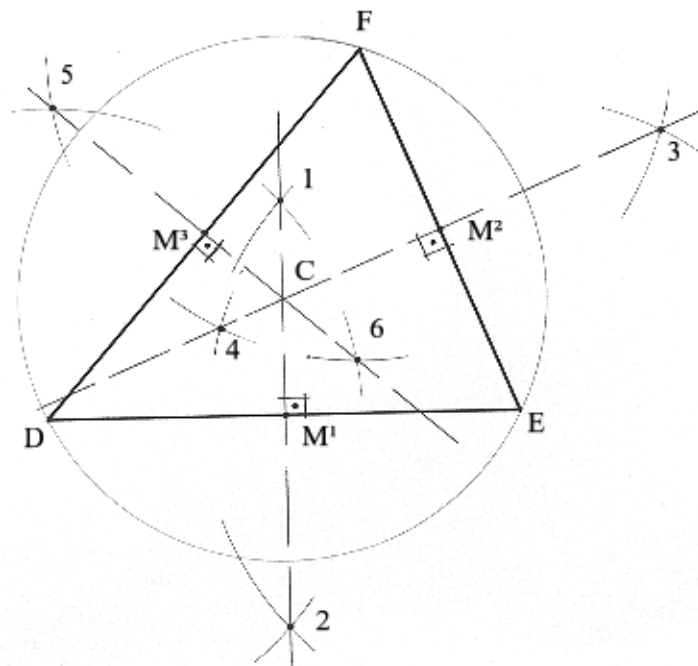
Em triângulos retângulos: o ortocentro coincidirá com o vértice que corresponde ao ângulo reto. Neste caso, a altura relativa a cada cateto será o cateto adjacente.



Neste caso, só precisamos traçar a altura relativa ao lado AC, procedendo como nos casos anteriores. A altura relativa ao lado AB é o próprio lado BC, que lhe é perpendicular. Do mesmo modo, a altura relativa ao lado BC é o próprio lado AB.

a) Mediatriz: É a perpendicular que passa pelo ponto médio de cada lado do triângulo. As mediatrizes cruzam-se num ponto chamado **Circuncentro**, que é equidistante dos vértices e, portanto, o centro da circunferência que circunscreve o triângulo. O circuncentro, conforme o formato do triângulo se apresenta em posições variadas. Assim:

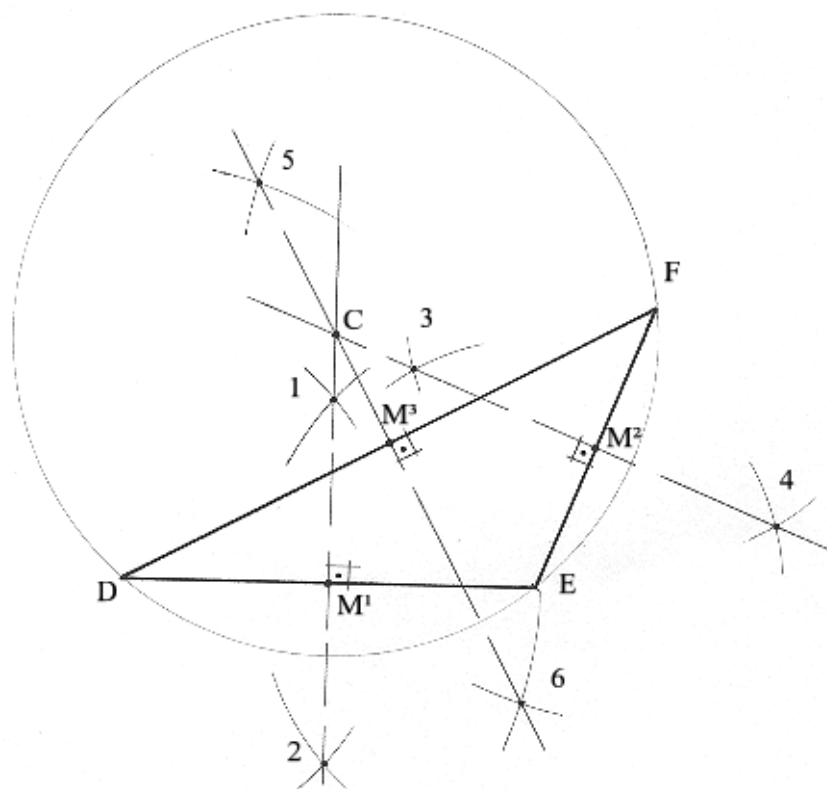
Em triângulos acutângulos: o circuncentro estará no interior do triângulo.



Para o traçado de cada mediatriz, consideramos que cada lado é um segmento de reta e usamos o traçado correspondente. Ex: para traçarmos a mediatriz de DE, centramos em D e E, respectivamente, com a mesma abertura, e obtivemos os pontos 1 e 2, pelo cruzamento dos arcos e traçamos a mediatriz, passando pelos dois pontos.

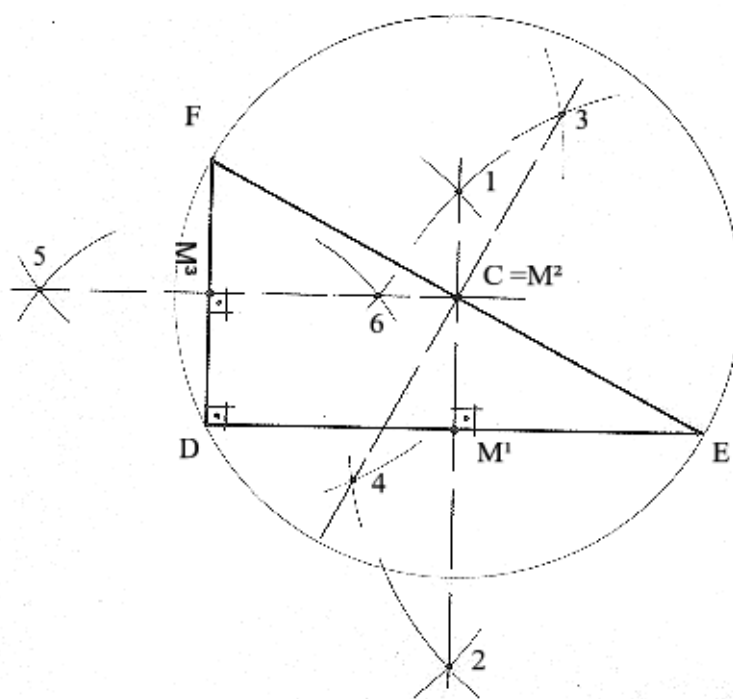
Procedendo do mesmo modo em EF e em DF, determinamos as outras mediatrizes e, pelo cruzamento das mesmas, determinamos o circuncentro. Os pontos M¹, M² e M³ são, respectivamente os pontos médios de DE, EF e DF.

Em triângulos obtusângulos: o circuncentro estará em região exterior ao triângulo.



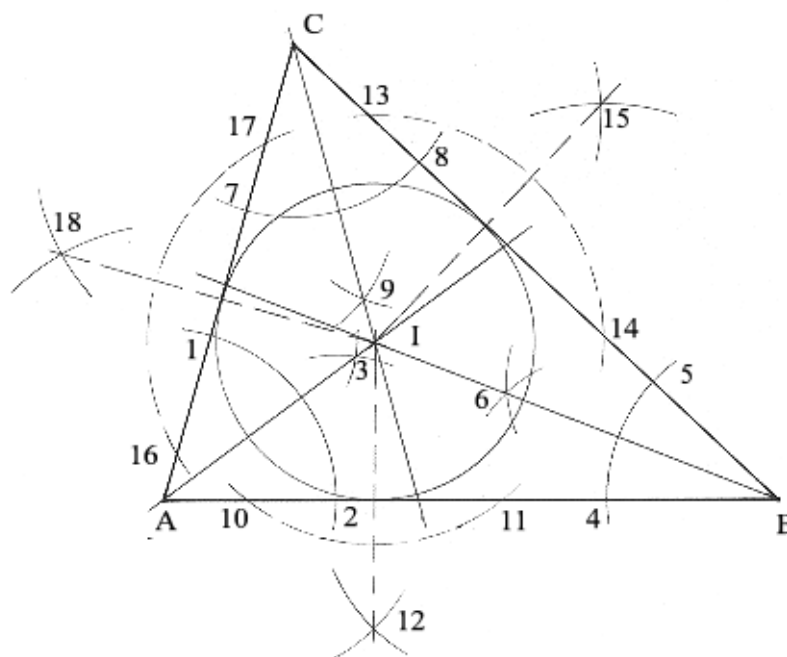
As mesmas explicações do caso anterior se aplicam aqui. É só observarmos o traçado da mediatriz de cada lado e chegaremos ao circuncentro.

Em triângulos retângulos: o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa.



Para os traçados das mediatrizes os procedimentos continuam os mesmos dos casos anteriores. No entanto, notamos agora que o circuncentro coincide com o ponto médio do lado que corresponde à hipotenusa do triângulo.

a) Bissetriz: É cada uma das retas que, passando pelo vértice, divide o ângulo que lhe corresponde em duas partes iguais. Seu ponto de cruzamento é o **Incentro**, eqüidistante dos lados e centro da circunferência inscrita no triângulo. Qualquer que seja o formato, o incentro estará sempre no interior do triângulo.



Calma ! Não vamos nos assustar com tantas linhas e números. É só seguir o passo a passo. Vamos lá !

Os pontos 1, 2 e 3 definem a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

Os pontos 4, 5 e 6 definem a bissetriz do ângulo $\hat{B}$.

E os pontos 7, 8 e 9 definem a bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

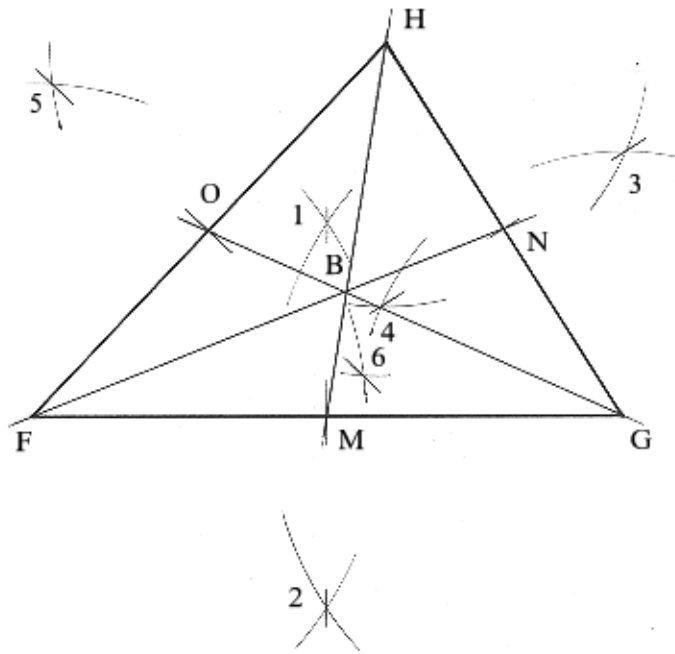
O cruzamento dessas bissetrizes vai determinar o incentro, o ponto I.

Para traçarmos a circunferência inscrita no triângulo, precisamos primeiro definir a distância entre o incentro e cada lado do triângulo. Essas distâncias são todas iguais, por definição.

Assim, com centro em I, obtemos os pontos 10 e 11 e em seguida 12, para definirmos a distância até o lado AB.

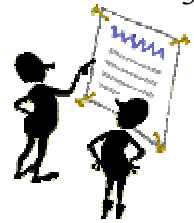
Sempre com centro em I, chegamos aos pontos 13, 14 e 15 e à distância ao lado BC. E, com os pontos 16, 17 e 18 temos a distância ao lado AC. Todas as distâncias correspondem ao raio da circunferência inscrita.

b) Mediana: É o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto de um triângulo. Seu ponto de encontro é o **Baricentro**, que divide cada uma das medianas na proporção de $1/3$. Em todo triângulo o baricentro é ponto interior do mesmo.



Para traçarmos as medianas temos que determinar primeiramente o ponto médio de cada lado do triângulo. Isso significa dizer que temos que traçar primeiro a mediatriz de cada lado. Feito isto, unimos o ponto médio de cada lado ao vértice oposto, obtendo-se as medianas.

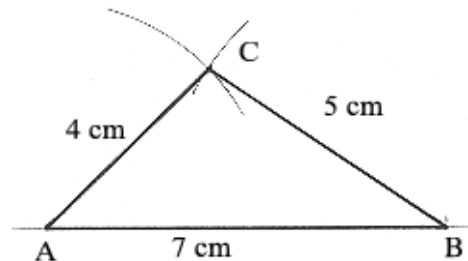
Desse jeito, MH é a mediana do lado FG, FN é a mediana do lado GH e GO é a mediana do lado FH.



6.5. EXERCÍCIOS:

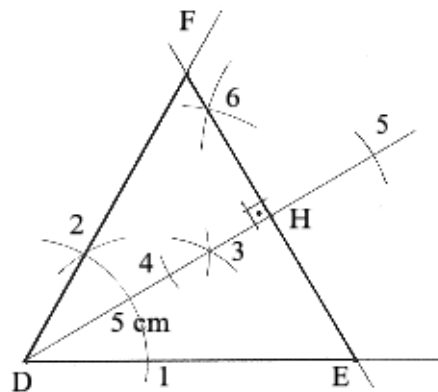
1) Construir um triângulo, conhecendo-se os três lados: 4, 5 e 7 cm.

Resolução: Traça-se um dos lados e, com centro em cada extremidade, com aberturas respectivamente iguais aos outros lados, faz-se o cruzamento dos arcos, determinando o terceiro vértice e definindo a figura.

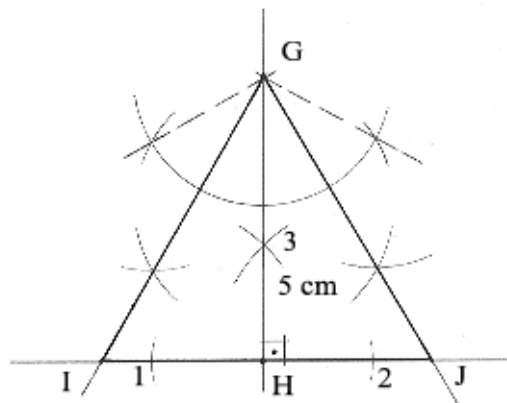


2) Construir um triângulo equilátero, conhecendo-se a altura: 5 cm.

Resolução: a) Traça-se uma semi-reta e, na origem, constrói-se um ângulo de 60° . Traça-se a bissetriz do ângulo e, sobre esta, aplica-se a medida da altura. Pelo ponto assinalado, traça-se uma perpendicular à altura. Esta perpendicular, ao cortar os lados do ângulo, definirá o triângulo.

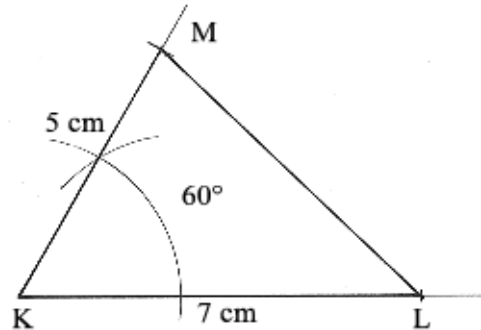


b) Traça-se uma reta e, num ponto qualquer, levanta-se uma perpendicular e, sobre esta, marca-se a medida da altura. Pela extremidade da altura, traçam-se dois ângulos de 60° , um para cada lado da altura. Traça-se a bissetriz de cada ângulo que, ao cruzarem com a primeira reta traçada, definem o triângulo.



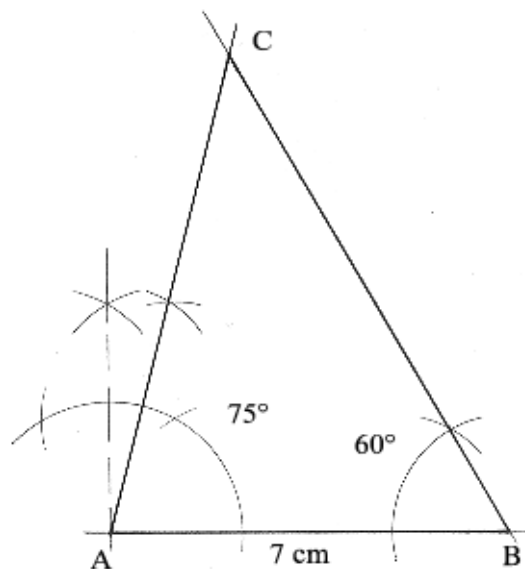
3) Construir um triângulo, conhecendo-se dois lados (7 e 5 cm) e o ângulo que formam entre si (60°).

Resolução: Constrói-se um ângulo de 60° e, sobre cada lado, marcam-se as medidas dos lados conhecidos do triângulo. Unem-se as extremidades, fechando a figura.



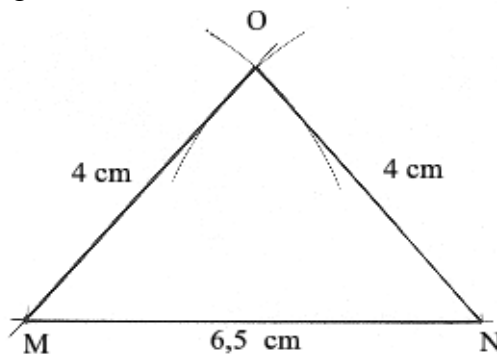
4) Construir um triângulo, dados: o lado $AB=7$ cm e os ângulos: $\hat{A}=75^\circ$ e $B=60^\circ$.

Resolução: Traça-se o lado AB e, pelas respectivas extremidades, constroem-se os ângulos de 75° e 60° . O encontro dos lados desses ângulos definirá o vértice que fecha a figura.



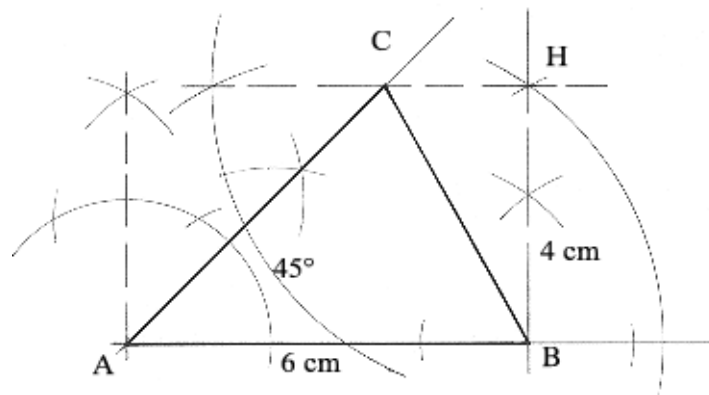
5) Construir um triângulo isósceles, conhecendo-se os lados iguais (4 cm) e a base (6,5 cm).

Resolução: Traça-se a base e, com centro nas extremidades e abertura igual ao lado, faz-se o cruzamento que define o triângulo.



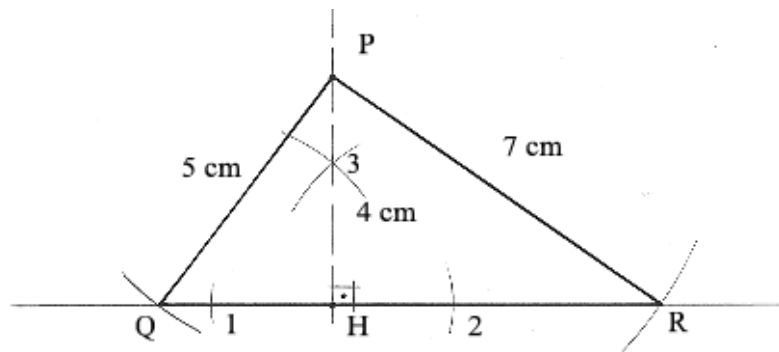
6) Construir um triângulo, dados: $AB=6$ cm, $\hat{A}=45^\circ$ e a altura (4 cm).

Resolução: Traça-se o lado AB e o ângulo $\hat{A}(45^\circ)$. Pela extremidade B , levanta-se uma perpendicular e marca-se a medida da altura. A esta distância, traça-se uma paralela ao lado AB . Esta, ao cortar o lado do ângulo de 45° , define o vértice C , que completa a figura.

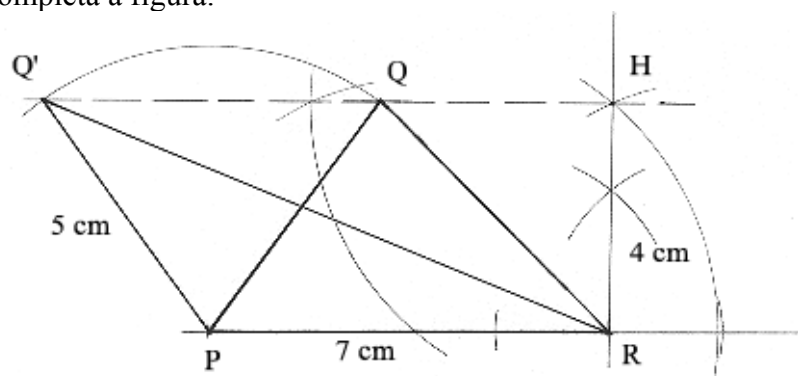


7) Construir um triângulo, conhecendo-se dois lados (7 e 5 cm) e a altura (4 cm).

Resolução: a) Traça-se uma reta e, num ponto qualquer, levanta-se uma perpendicular, marcando-se sobre esta a medida da altura. Com centro na extremidade da altura e aberturas respectivamente iguais a cada um dos lados, cruzamos estas distâncias sobre a reta, determinando os pontos que correspondem aos vértices que completam a figura.



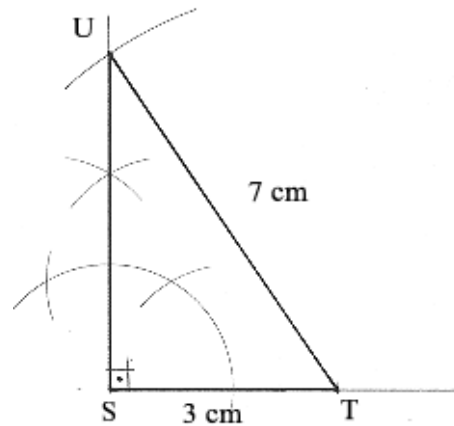
b) Traça-se o lado de 7 cm e, por uma das extremidades, levanta-se uma perpendicular. Sobre esta, marca-se a medida da altura (4 cm) e traça-se uma paralela ao lado já traçado. Com centro na outra extremidade do lado, cruza-se a medida do outro lado (5 cm) com a paralela, definindo o vértice que completa a figura.



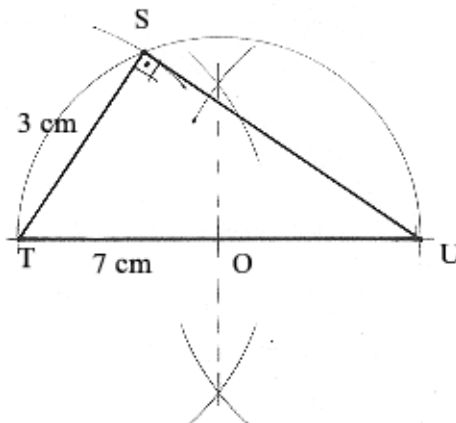
Note que temos duas opções: a partir da extremidade P , podemos cruzar em Q e Q' , apresentando o exercício duas soluções.

8) Construir um triângulo retângulo, conhecendo-se a hipotenusa (7 cm) e um cateto (3 cm).

Resolução: a) Traçam-se duas retas perpendiculares. Sobre uma delas aplica-se a medida do cateto (3 cm). Com centro na extremidade deste e abertura igual à medida da hipotenusa, cruza-se sobre a outra perpendicular, definindo o outro cateto e completando-se a figura.

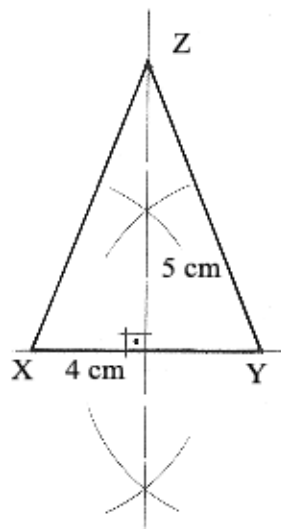


b) Traça-se a hipotenusa (7 cm) e determina-se o seu ponto médio, através do traçado de sua mediatriz. Centro no ponto médio, traça-se a semicircunferência que tem a hipotenusa como diâmetro. Centro em uma das extremidades, abertura igual ao cateto, cruza-se sobre a semicircunferência, determinando-se o vértice de ângulo reto, completando-se a figura.



9) Construir um triângulo isósceles, conhecendo-se a base (4 cm) e a altura (5 cm).

Resolução: Traça-se a base (4 cm) e sua mediatriz. Sobre esta, marca-se a medida da altura. Une-se a extremidade da altura às extremidades das bases, definindo-se os lados iguais.

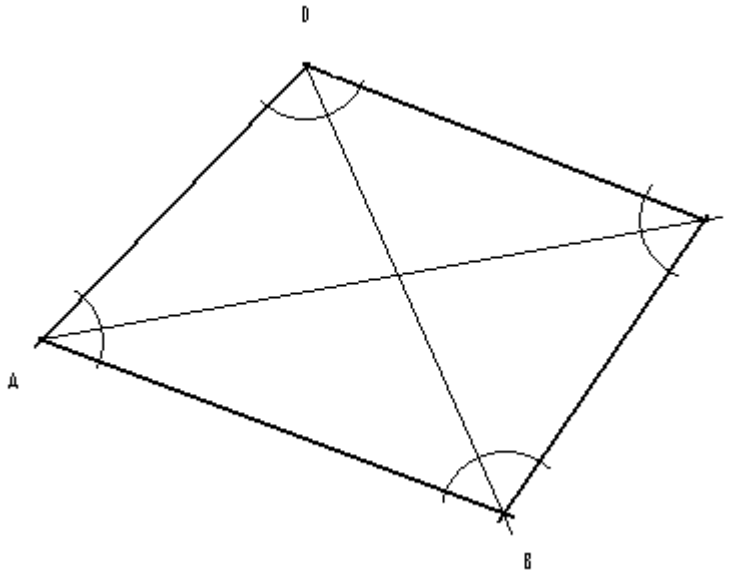


7. QUADRILÁTEROS

Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Definir e classificar paralelogramos;
- Traçar os paralelogramos;
- Traçar trapézios.

7.1. DEFINIÇÃO: São os polígonos de quatro lados.



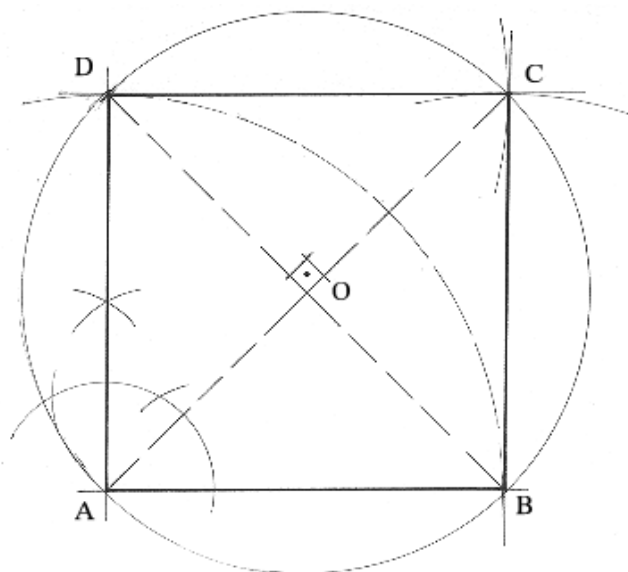
7.2. ELEMENTOS:

- Lados: AB, BC, CD e AD.
- Vértices: A, B, C e D.
- Ângulos: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.
- Diagonais: Segmentos que unem dois vértices opostos. São os segmentos AC e BD.

7.3. CLASSIFICAÇÃO:

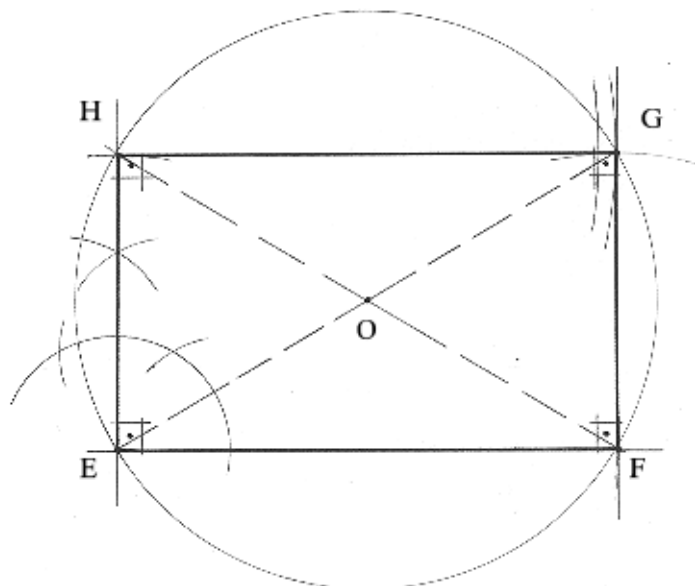
7.3.1. Paralelogramos: São quadriláteros que têm os lados opostos paralelos. São o:

a) Quadrado: É o paralelogramo que tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos (90°). Suas diagonais são iguais e cruzam-se também a 90° . Uma diagonal é mediatriz da outra, o que significa dizer que seu ponto de cruzamento equidista dos vértices, sendo, portanto o centro da circunferência que circunscreve o quadrado. Este ponto é também equidistante dos lados da figura, o que permite a inscrição da circunferência no quadrado. Para este traçado, precisamos primeiramente definir a distância entre o ponto e o lado (raio da circunferência), traçando a perpendicular que passa pelo ponto e atinge o lado.



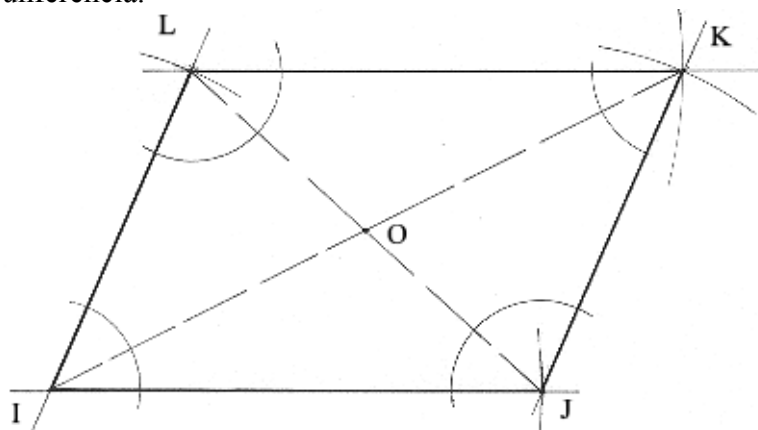
Para a construção do quadrado, traçamos primeiramente o lado AB. Pela extremidade A, levantamos uma perpendicular. O tamanho do lado (AB) é rebatido sobre a perpendicular, definindo D. Para isto, centramos em A e fazemos abertura até B. Com a mesma abertura AB, fazemos centro em B e D e, pelo cruzamento dos arcos, definimos o ponto C, completando a figura. Traçamos, então, as diagonais AC e BD e o cruzamento destas define o ponto O. Com centro em O e abertura até qualquer dos vértices descrevemos a circunferência que circunscreve o quadrado.

b) Retângulo: É o paralelogramo que tem os lados opostos iguais dois a dois e os quatro ângulos retos. Suas diagonais são iguais e cortam-se num ângulo qualquer, diferente de 90° . Este ponto divide ambas em duas partes iguais, sendo, desse modo, eqüidistante dos vértices, tornando o retângulo inscritível na circunferência.



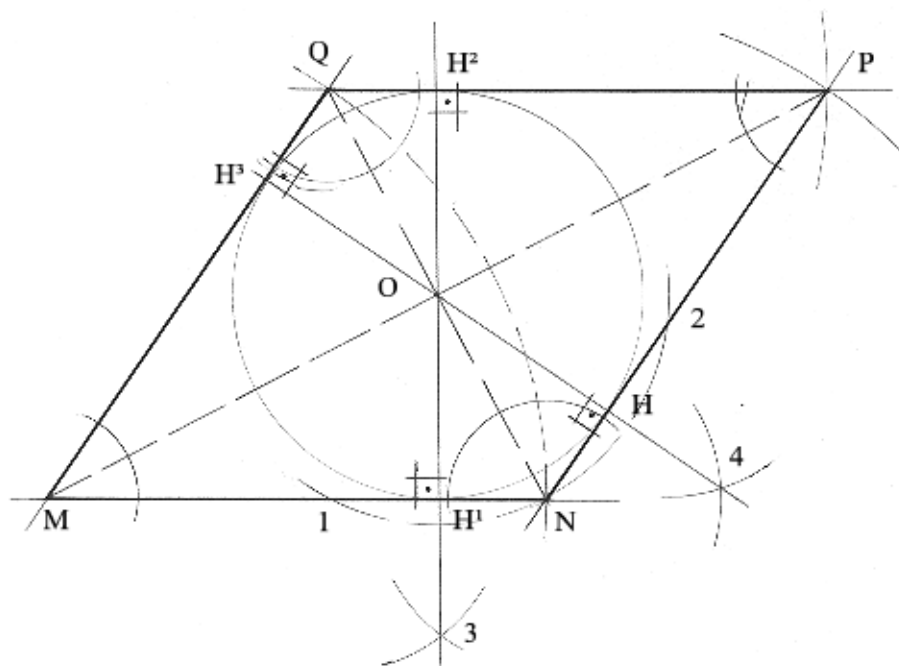
Para a construção do retângulo, traçamos o lado EF. Pela extremidade E, levantamos uma perpendicular. Sobre esta, aplicamos a medida do lado (que não pode ser igual à EF), definindo então EH. Tomamos, então a distância EF no compasso e traçamos o arco com centro em H. Este arco vai cruzar com o arco de abertura EH e centro em F, definindo o ponto G, completando a figura. Traçamos, então as diagonais e, com centro no ponto de cruzamento das mesmas (O), descrevemos a circunferência.

c) Paralelogramo propriamente dito ou Rombóide: É o paralelogramo que tem os lados opostos iguais dois a dois e os ângulos opostos iguais entre si, mas diferentes de 90° . Suas diagonais são diferentes e cruzam-se num ângulo qualquer, diferente de 90° , o que não o torna inscrito na circunferência.



Continuamos empregando o mesmo sistema de transporte de distâncias com o compasso. Só que temos que observar duas coisas no paralelogramo: os lados adjacentes (IJ e IL) não podem ser perpendiculares, isto é, não podem estar a 90° e as medidas destes mesmos lados também não podem ser iguais.

d) Losango ou Rombo: É o paralelogramo que tem os lados iguais e os ângulos opostos iguais entre si, porém diferentes de 90° . Suas diagonais são diferentes e cortam-se num ângulo reto, sendo uma mediatriz da outra. O ponto de cruzamento é equidistante dos lados, permitindo a inscrição da circunferência no losango, sendo necessário para isso o traçado da perpendicular que une o ponto ao lado. Note que este segmento é o raio da circunferência.

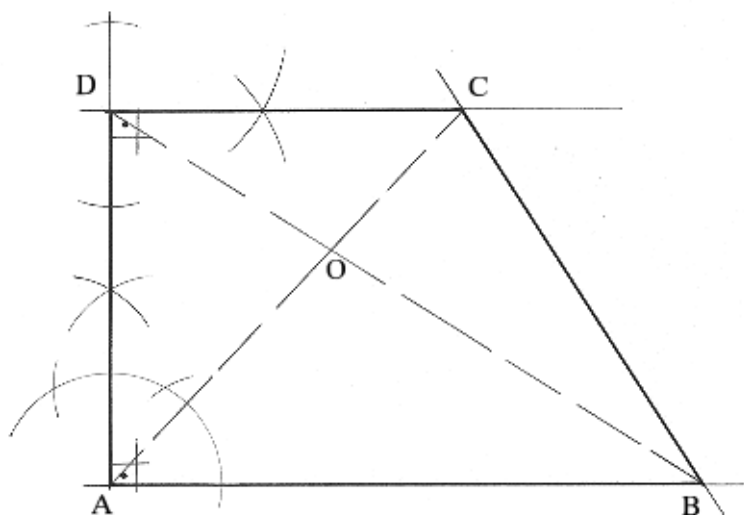


Nesta construção, traçamos os lados MN e MQ, que são iguais e não podem ser perpendiculares (senão a figura seria um quadrado, não é mesmo?). Para isto, basta rebater a medida MN em MQ. Cruzamos então os arcos, com esta mesma medida e centro em N e Q, obtendo o ponto P, definindo o losango.

Para traçarmos a circunferência inscrita na figura, temos que definir a distância do ponto O (ponto de cruzamento das diagonais) até os lados. Esta distância corresponderá ao raio da curva. Então, com centro em O e aproveitando-se o ponto N, traçamos o arco que define os pontos 1 e 2. Centro em 1 e em N, com a mesma abertura, fazemos o cruzamento que define 3. Idem, com centro em N e 2, definindo 4. Traçamos a reta que passa por 3 e O, que define os segmentos OH^1 e OH^2 . Da mesma forma, traçamos a reta que passa por 4 e O, definindo OH e OH^3 . Estas distâncias são todas iguais e são o raio da circunferência inscrita no losango.

7.3.2. Trapézios: São os quadriláteros que tem apenas dois lados opostos paralelos. Esses lados são chamados de bases. Como as bases sempre serão diferentes, os trapézios têm, então uma base maior e uma base menor. A distância entre as bases é a altura do trapézio.

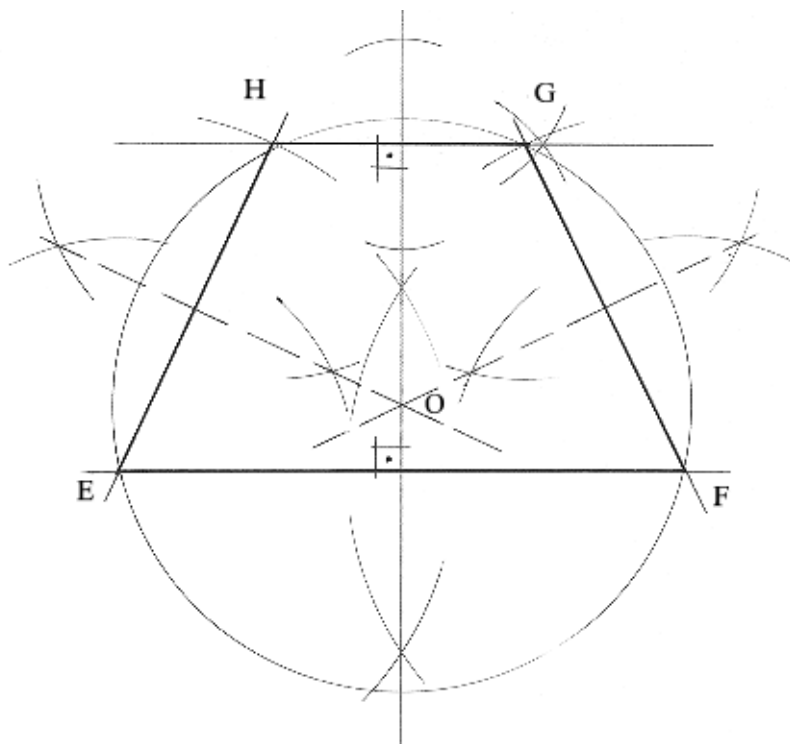
a) Trapézio retângulo: É o trapézio que tem dois ângulos retos.



Traçamos a base maior (AB) e, por uma das extremidades, o lado perpendicular. Sobre este, aplicamos sua medida (AD). Pela extremidade D, traçamos uma perpendicular à AD e, sobre esta, aplicamos a medida da base menor (DC). Unindo-se B a C, completamos a figura.

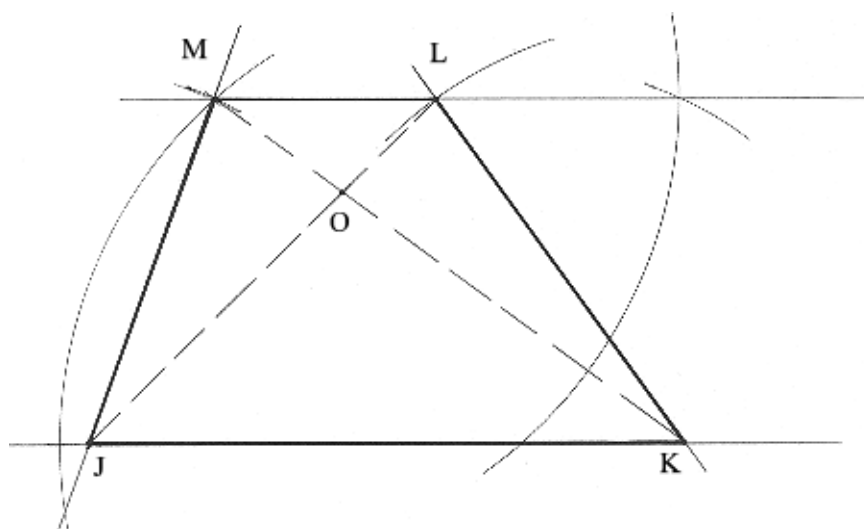
Observe que o lado AD é perpendicular a ambas as bases e representa a distância entre essas bases. O lado AD é, portanto, a altura do trapézio.

b) Trapézio isósceles: É o trapézio que tem os lados não paralelos iguais. Os ângulos das bases são iguais, assim como suas diagonais. O trapézio isósceles é a única figura desse grupo que é inscritível numa circunferência, cujo centro é o ponto de encontro das mediatrizes das bases e dos lados não paralelos.

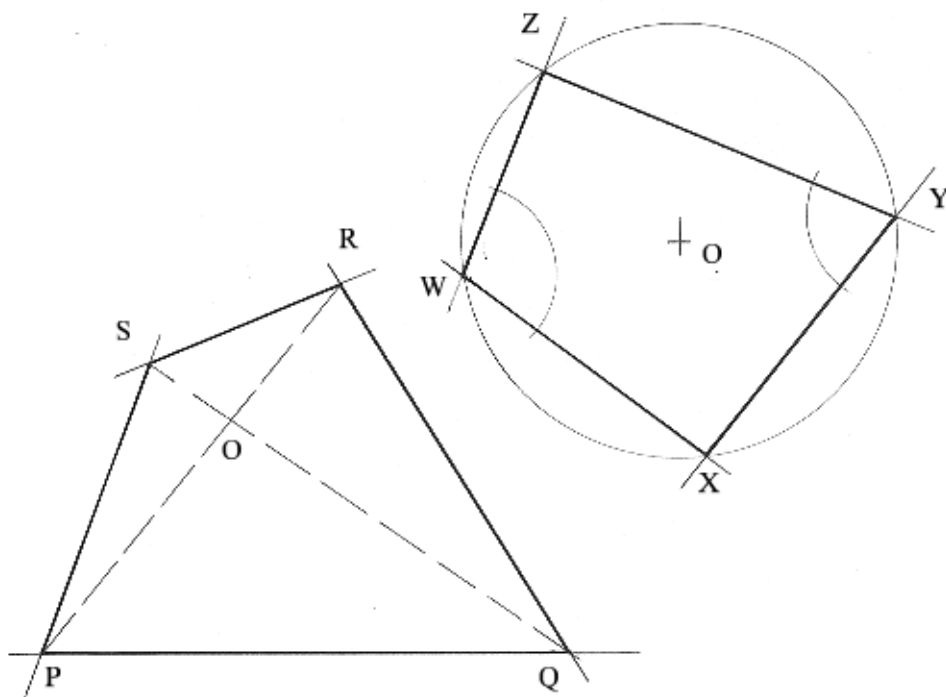


A altura de qualquer trapézio é sempre perpendicular às bases, ou à reta que as contém. No exemplo, traçamos a base maior (EF) e sua mediatriz e, sobre esta, definimos a altura. Traçamos então uma perpendicular à altura. Esta perpendicular é paralela à base maior. Tomando-se a medida dos lados não paralelos no compasso, fazemos centro em cada extremidade da base maior e aplicamos esta medida sobre a base menor, definindo os pontos G e H e completando a figura. Traçamos, então, as mediatrizes dos lados não paralelos EH e FG. As mesmas cruzam-se no mesmo ponto, sobre a mediatriz das bases maior e menor. Todas as mediatrizes, portanto, têm o ponto O como ponto comum. Este ponto é o centro da circunferência que circunscreve o trapézio isósceles.

c) Trapézio escaleno: É o trapézio que tem os lados não paralelos diferentes e não possui ângulo reto.



7.3.3. Trapezóides: São quadriláteros que não têm lados paralelos. Os trapezóides podem ser inscritíveis numa circunferência desde que seus ângulos opostos sejam suplementares, isto é, sua soma seja igual a 180° .



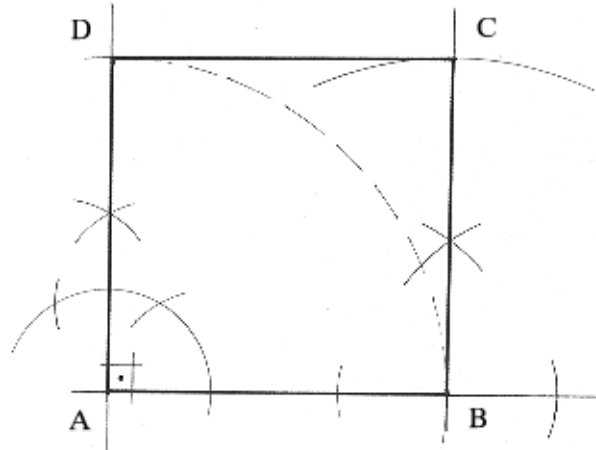
No trapezóide WXYZ, a soma dos ângulos W e Y é igual a 180° , o que implica que a soma de X e Z também tenha esse valor, fazendo com que o trapezóide seja inscritível.

7.4. EXERCÍCIOS:

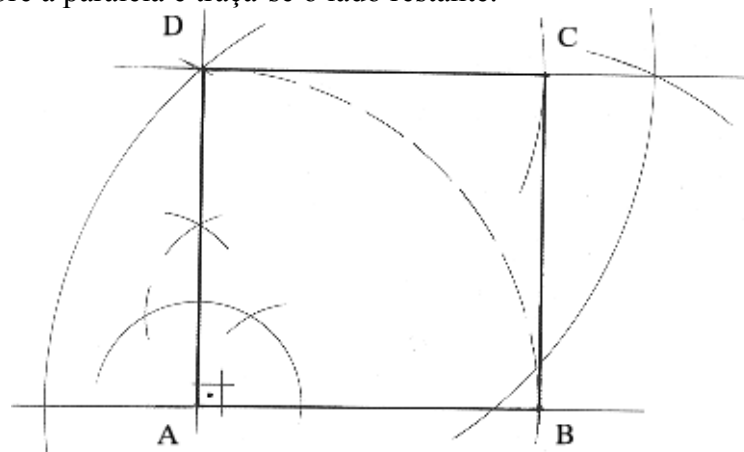
1) Construir um quadrado de lado igual a 6 cm.

Resolução: Traça-se o lado. Por uma das extremidades, levanta-se uma perpendicular e, sobre esta, transporta-se a medida do lado, centrando-se na extremidade, com abertura correspondente ao lado, rebatendo-se a distância sobre a perpendicular. A partir daqui, temos três alternativas.

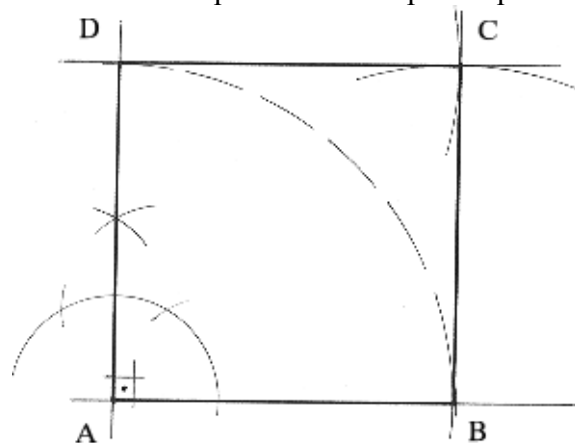
a) Pela outra extremidade, repete-se todo o processo anterior. Fecha-se a figura unindo as extremidades dos dois lados traçados.



b) Pela extremidade do lado rebatido, traça-se uma paralela ao primeiro lado. Aplica-se então a medida do lado sobre a paralela e traça-se o lado restante.

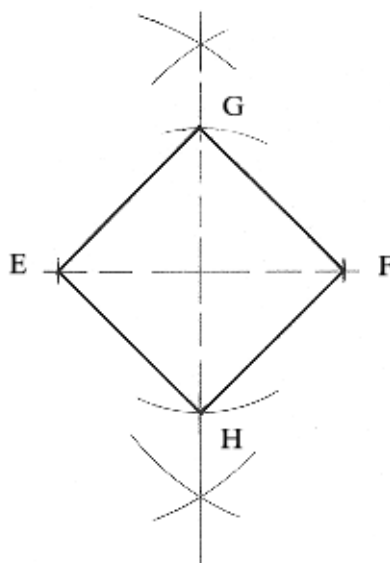


c) Após definidos dois lados, centramos nas extremidades desses dois lados, com abertura igual à medida dos lados e cruzamos dois arcos que definirão o ponto que completará a figura.



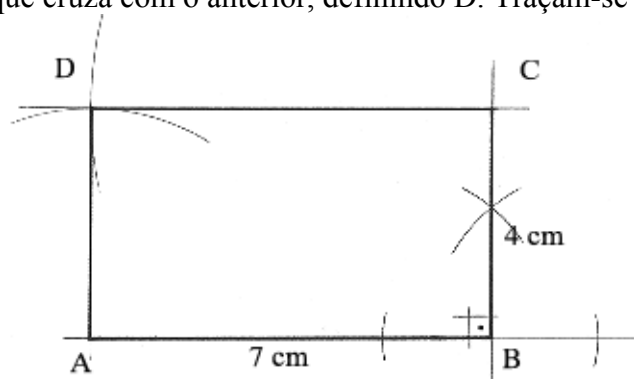
2) Construir um quadrado, dada a sua diagonal (5 cm).

Resolução: Traça-se a mediatriz da diagonal. Centra-se no ponto médio, com abertura até uma das extremidades, aplicando-se esta distância numa direção e na outra sobre a mediatriz. Estes dois pontos, junto com as extremidades da diagonal, definem os quatro vértices do quadrado. Traçamos, então, a figura.



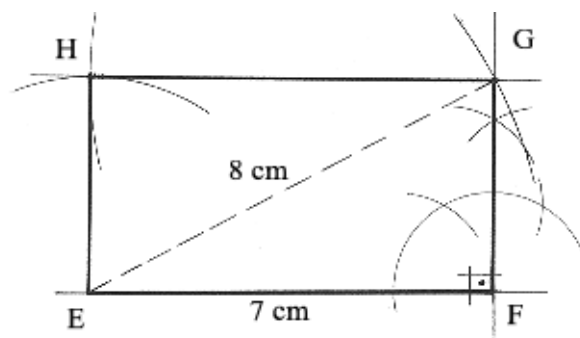
3) Construir um retângulo conhecendo-se os lados: $AB=7\text{ cm}$ e $BC=4\text{ cm}$.

Resolução: Traça-se o lado AB e, por B, levanta-se uma perpendicular. Sobre esta, aplica-se a medida do lado BC (4 cm). Centro em A, abertura BC, traça-se um arco. Centro em C, abertura BA, traça-se o arco que cruza com o anterior, definindo D. Traçam-se os lados restantes.



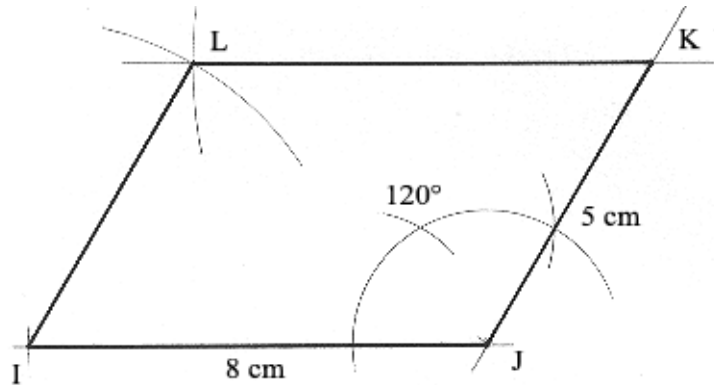
4) Construir um retângulo, dados: um lado (7 cm) e a diagonal (8 cm).

Resolução: Traça-se o lado. Por uma das extremidades, levanta-se uma perpendicular. Com centro na outra extremidade e abertura igual à medida da diagonal, cruza-se sobre a perpendicular, definindo-se o lado desconhecido. A partir daí, procede-se como no exercício anterior, para fechamento da figura.



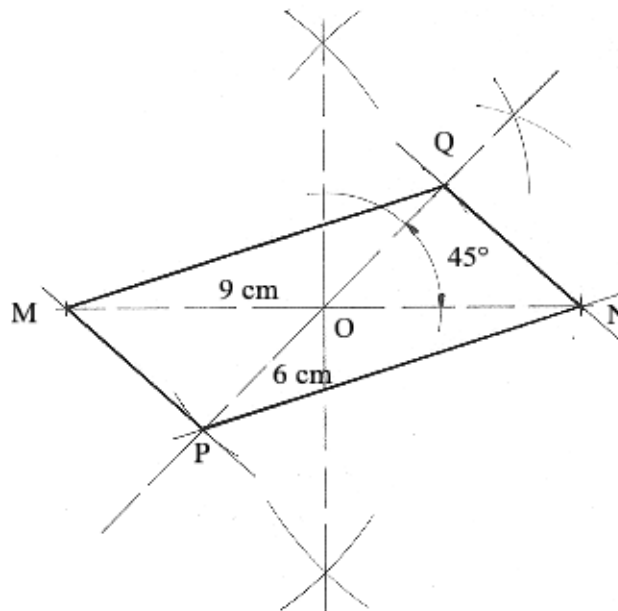
5) Construir um paralelogramo propriamente dito, conhecendo-se os dois lados: (8 e 5 cm) e o ângulo que formam entre si (120°).

Resolução: Traça-se um dos lados e, por uma das extremidades constrói-se o ângulo de 120° . Sobre este, aplica-se a medida do outro lado. Transportam-se, então, com o compasso, as medidas de cada um dos lados a partir das respectivas extremidades, cruzando as distâncias e definindo o vértice que falta. Traçam-se, então, os lados que completam a figura.



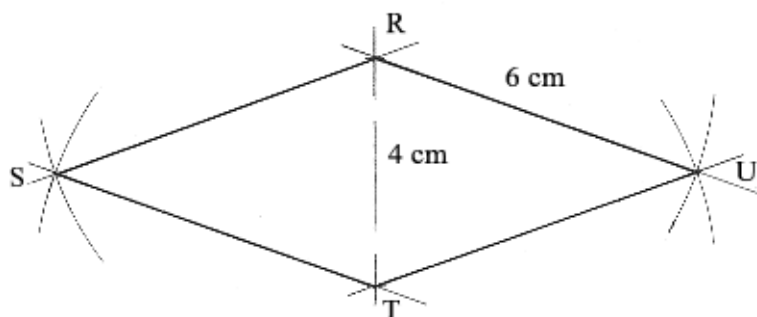
6) Construir um paralelogramo propriamente dito, conhecendo-se as diagonais (9 e 6 cm) e o ângulo que formam entre si (45°).

Resolução: Sabemos que as diagonais do paralelogramo propriamente dito cortam-se uma no ponto médio da outra. Desse modo, traçamos primeiramente uma delas e, traçando sua mediatriz, determinamos seu ponto médio. Por este ponto, traçamos a reta que forma com o lado um ângulo de 45° . Sobre esta reta, aplica-se a medida do outro lado, dividida em duas partes iguais, a partir do ponto médio, definindo-se os quatro vértices. Pela união desses vértices, construímos a figura.



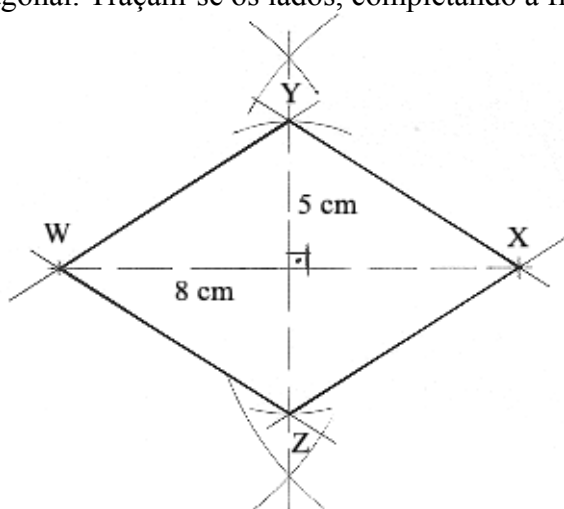
7) Construir um losango, conhecendo-se o lado (6 cm) e uma diagonal (4 cm).

Resolução: Traçamos a diagonal e a partir de suas extremidades, com abertura igual ao lado, centramos e cruzamos os arcos que, dois a dois, definirão os vértices que faltam. Unindo esses vértices às extremidades das diagonais, completamos a figura.



8) Construir um losango, conhecendo-se as diagonais (8 e 5 cm).

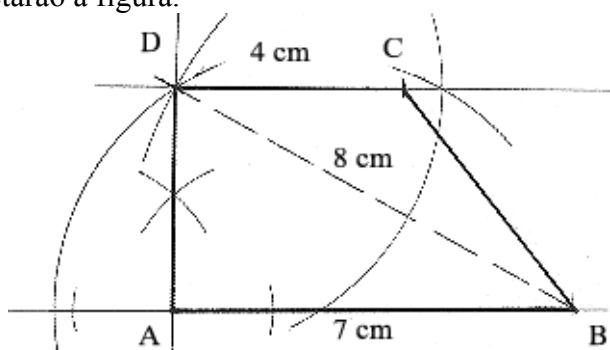
Resolução: Traça-se uma das diagonais e sua mediatriz. Sobre a mediatriz, a partir do ponto médio, aplica-se a medida da outra diagonal, dividida em duas partes iguais, definindo os vértices opostos desta diagonal. Traçam-se os lados, completando a figura.



9) Construir um trapézio retângulo dadas: as bases (7 e 4 cm) e uma diagonal (8 cm).

Resolução: Traçamos a base maior e, por uma das extremidades, levantamos uma perpendicular. A partir da outra extremidade, com abertura igual à medida da diagonal, fazemos centro e cruzamos o arco sobre a perpendicular. Desse modo, definimos o lado perpendicular às bases e que corresponde à altura do trapézio. Pelo ponto encontrado, traçamos uma paralela à base maior, já traçada.

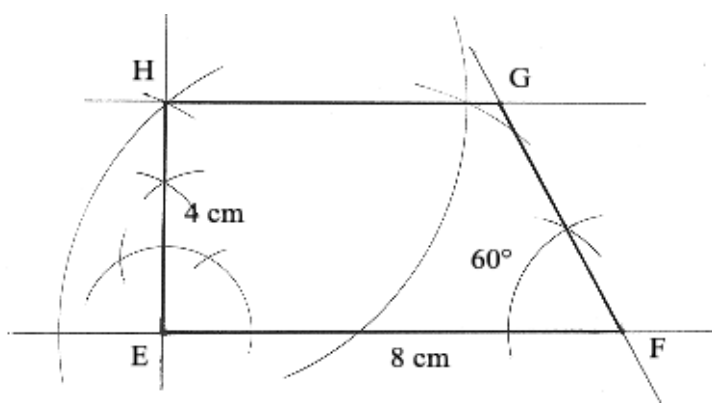
Sobre esta paralela aplica-se a medida da outra base (base menor). As extremidades destas duas bases, unidas, completarão a figura.



10) Construir um trapézio retângulo, conhecendo-se: a base maior (8 cm), a altura (4 cm) e um ângulo (60°).

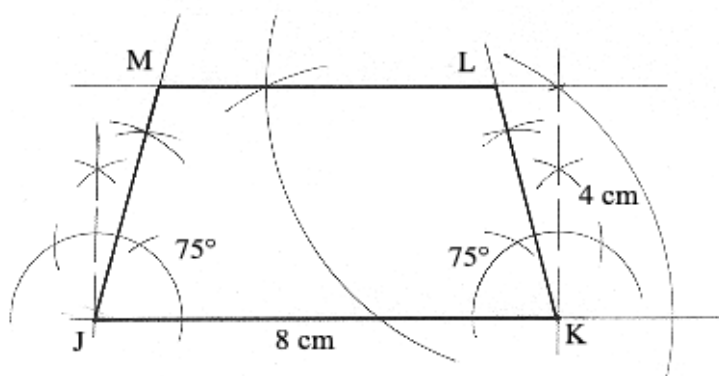
Resolução: Traça-se a base. Por uma das extremidades traça-se uma perpendicular e, sobre esta, aplica-se a medida da altura. Pela extremidade da altura, traça-se uma paralela. Pela outra

extremidade da base, constrói-se o ângulo de 60° , cujo lado, ao encontrar a paralela, define o vértice restante.



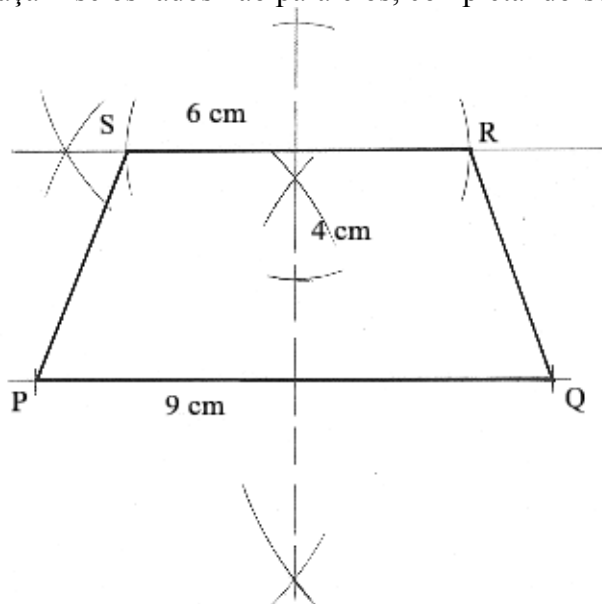
11) Construir um trapézio isósceles, dadas: a base maior (8 cm), a altura (4 cm) e um ângulo (75°).

Resolução: Traça-se a base. Num ponto qualquer da base (uma das extremidades, por exemplo) levanta-se uma perpendicular e aplica-se sobre esta a medida da altura. Por este ponto, traça-se uma paralela à base. Por cada extremidade da base, constrói-se um ângulo de 75° . O cruzamento dos lados dos ângulos com a paralela definirá a figura.



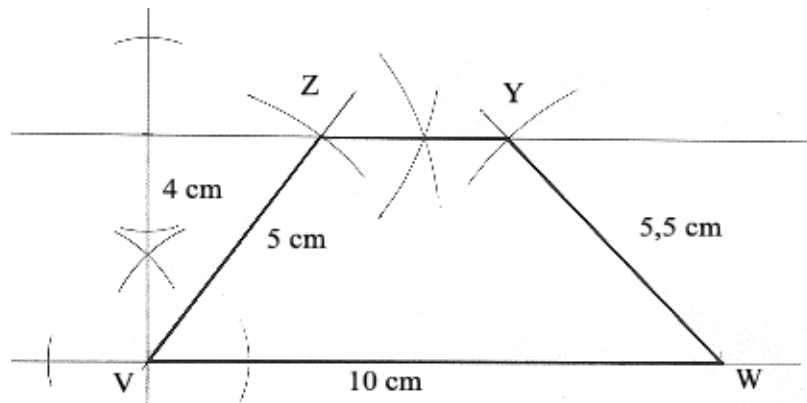
12) Construir um trapézio isósceles, conhecendo-se as bases (9 e 6 cm) e a altura (4 cm).

Resolução: Traça-se a base maior e sua mediatriz. Aplica-se a medida da altura sobre a mediatriz. A esta distância, traça-se uma paralela à base maior. A partir do ponto de encontro da altura com a paralela, aplica-se, metade para um lado, metade para o outro, a medida da base menor, definindo esta. Traçam-se os lados não paralelos, completando-se a figura.



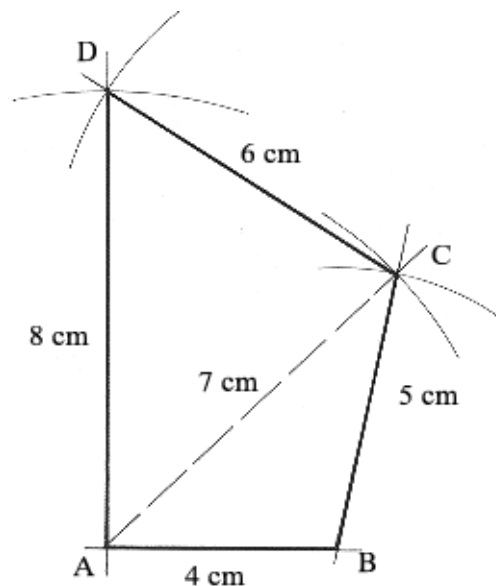
13) Construir um trapézio escaleno, dadas: a base maior (10 cm), a altura (4 cm) e os lados não paralelos (5 e 5,5 cm).

Resolução: Traça-se a base maior e, por um ponto qualquer desta, levanta-se uma perpendicular. Aplica-se sobre esta a medida da altura e traça-se uma paralela. Com centro em uma das extremidades da base e abertura correspondente a um dos lados, fazemos cruzamento com a paralela e posicionando o lado. Centro na outra extremidade, abertura igual ao outro lado, fazemos cruzamento, definindo o outro lado e completando a figura.



14) Construir o trapézóide ABCD, conhecendo-se: os lados $AB=4$ cm, $BC=5$ cm, $CD=6$ cm, $AD=8$ cm e a diagonal $AC=7$ cm.

Resolução: Traça-se o lado AB. Centro em A, raio AC (diagonal), traça-se um arco. Centro em B, raio BC, cruza-se com o arco AC, definindo-se a posição do lado BC. Note que temos um triângulo ABC. Centro em C, raio CD, traça-se um arco. Centro em A, raio AD, traça-se o arco que, cruzando com o arco CD, definirá o vértice D, completando a figura.



8. POLÍGONOS

Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Definir e classificar polígonos convexos;
- Traçar polígonos convexos inscritos na circunferência;

8.1. DEFINIÇÃO: Polígono é a região do plano limitada por uma linha quebrada ou poligonal que se fecha sobre si mesma. Entenda-se aqui como linha poligonal uma linha formada pela junção de segmentos de reta, extremidade a extremidade.

8.2. ELEMENTOS: Lados, vértices, ângulos (internos e externos) e diagonais.

8.3. POLÍGONO CONVEXO: Cada lado de um polígono é um segmento de reta, que pertence a uma reta suporte. Esta reta divide o plano que a contém em dois semiplanos. Quando todos os pontos de um polígono pertencem a somente um dos semiplanos que a reta que contém um de seus lados determina, diz-se que o polígono é convexo. A situação contrária denomina o polígono de não convexo. Como exemplo, temos os polígonos estrelados.

8.4. POLÍGONOS REGULARES: São polígonos que têm os lados e os ângulos iguais.

8.5. DENOMINAÇÃO: Conforme o número de lados ou de ângulos, os polígonos são chamados de:

Triângulo ou **Trilátero** (3 lados)

Quadrilátero (4 lados)

Pentágono (5 lados)

Hexágono (6 lados)

Heptágono (7 lados)

Octógono (8 lados)

Eneágono (9 lados)

Decágono (10 lados)

Undecágono (11 lados)

Dodecágono (12 lados)

Pentadecágono (15 lados)

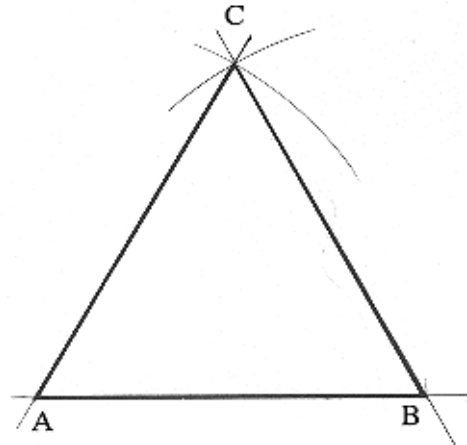
Icoságono (20 lados)

*Quando um polígono apresenta um número de lados diferente dos da relação acima, diz-se que o polígono é de “n lados”. Ex: polígono de 13 lados, polígono de 21 lados, etc.

8.6. CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES:

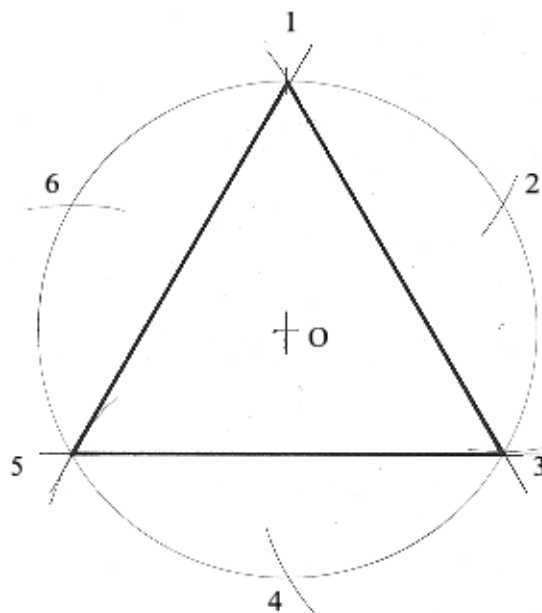
Triângulo equilátero:

a) A partir do lado: Traça-se o lado e, com centro em cada extremidade e abertura igual ao lado, faz-se o cruzamento dos arcos, determinando-se o terceiro vértice.



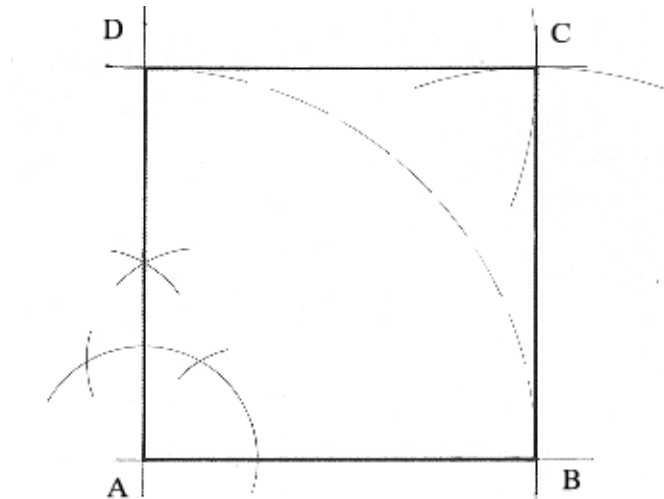
b) Inscrito na circunferência: Descreve-se a circunferência com raio qualquer. Com a mesma abertura do raio, a partir de um ponto qualquer pertencente à curva, assinalam-se sucessivos cruzamentos, a partir de cada ponto encontrado, dividindo a circunferência em seis partes exatamente iguais. Três pontos, alternadamente, dessa divisão definem um triângulo equilátero.

*Esta é uma relação métrica existente entre o raio da circunferência, que é igual ao lado do hexágono regular inscrito na mesma.

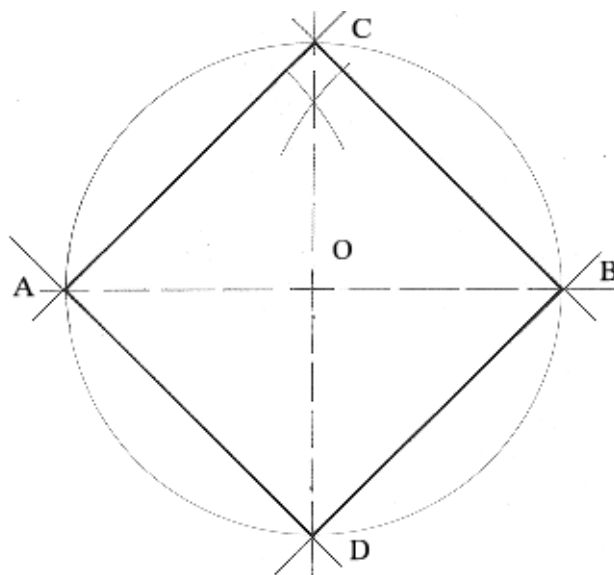


Quadrado:

a) A partir do lado: Traça-se o lado. Por uma das extremidades, levanta-se uma perpendicular. Sobre esta, rebate-se a medida do lado. Com centro nas extremidades dos lados definidos e abertura igual ao lado, cruzamos os arcos que definirão o quarto vértice, fechando a figura.



b) Inscrito na circunferência: Assinala-se um ponto, que será o centro da circunferência, descrevendo-a em seguida. Passando pelo centro, traça-se uma reta que, ao cortar a curva em dois pontos, definirá o seu diâmetro. Com centro nas extremidades do diâmetro e abertura maior que a metade deste, cruzam-se arcos que definirão o ponto que, junto com o centro da circunferência, alinharão um outro diâmetro, perpendicular ao primeiro. Estes dois diâmetros dividem a circunferência em quatro partes iguais, correspondendo aos quatro pontos que inscrevem o quadrado.



Pentágono regular:

a) A partir do lado: Traça-se o lado AB.

Com centro em A, raio AB, descreve-se uma circunferência.

Centro B, raio BA, descreve-se uma segunda circunferência que, ao cruzar com a primeira, define os pontos 1 (acima) e 2 (abaixo do lado).

Centro em 2, mesmo raio, traça-se a terceira circunferência, que passa em A e B.

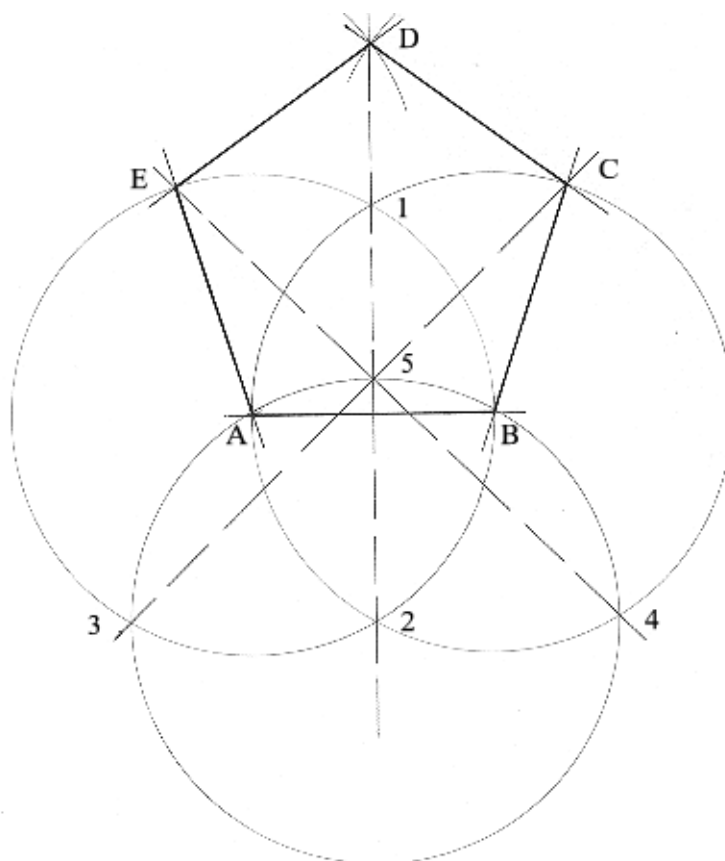
Esta terceira circunferência, ao cruzar com a de centro A, define o ponto 3 e, com a de centro B o ponto 4.

Os pontos 1 e 2 definem uma reta que é mediatriz do lado e corta a circunferência de centro 2 no ponto 5.

Traça-se a reta 35 que corta a circunferência de centro B em C.

Traça-se a reta 45 que corta a circunferência de centro A em E.

Com raio igual ao lado e centro em C ou E, cruza-se sobre a mediatriz, definindo D, completando a figura.



a) Inscrito na circunferência: Descreve-se uma circunferência e, como na construção do quadrado, traçam-se dois diâmetros perpendiculares.

O ponto superior vertical denominaremos de A.

Pelo raio horizontal direito, traçamos sua mediatriz, determinando M, ponto médio.

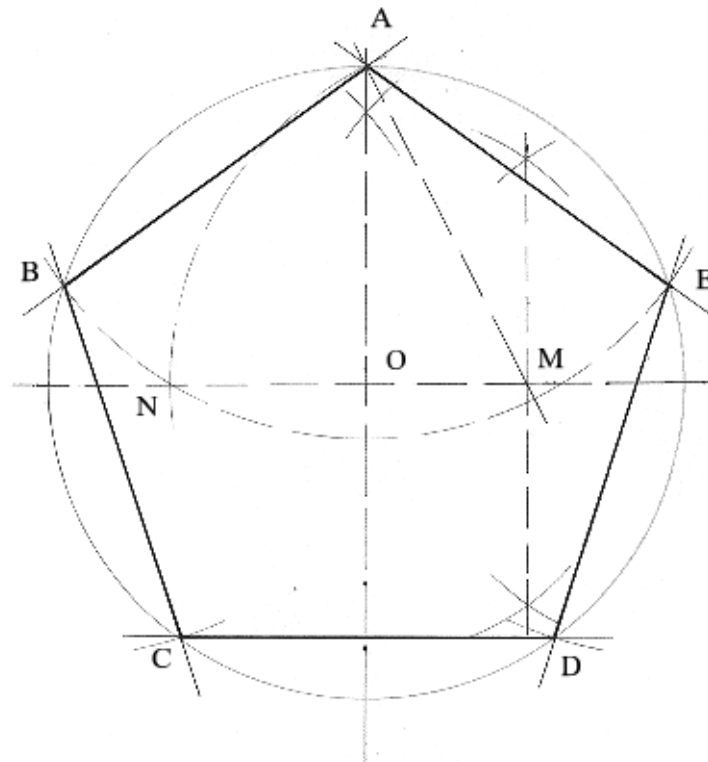
Centro M, raio MA, baixa-se o arco que corta o raio horizontal esquerdo em N.

Centro A, raio AN, descreve-se o arco que corta a circunferência em B e E.

Centro B, raio $AN=AB=AE$, determina-se C, sobre a circunferência.

Centro C, mesmo raio, determina-se D.

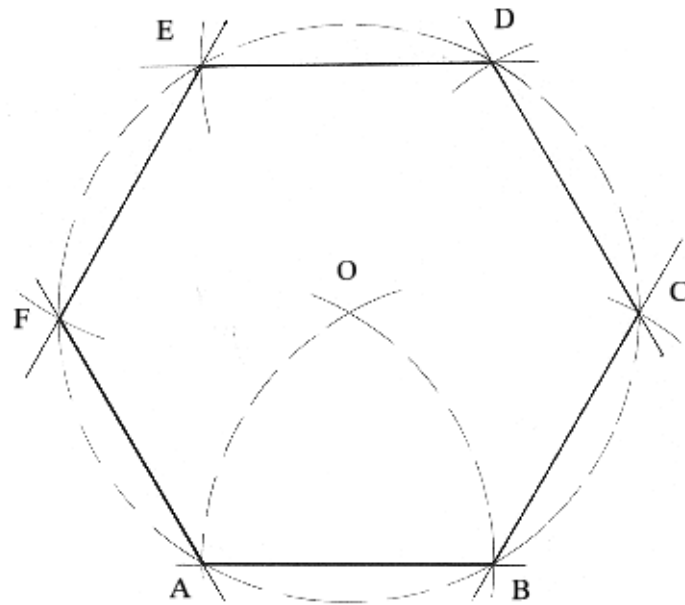
Traçamos, então, os lados AB, BC, CD, DE e AE.



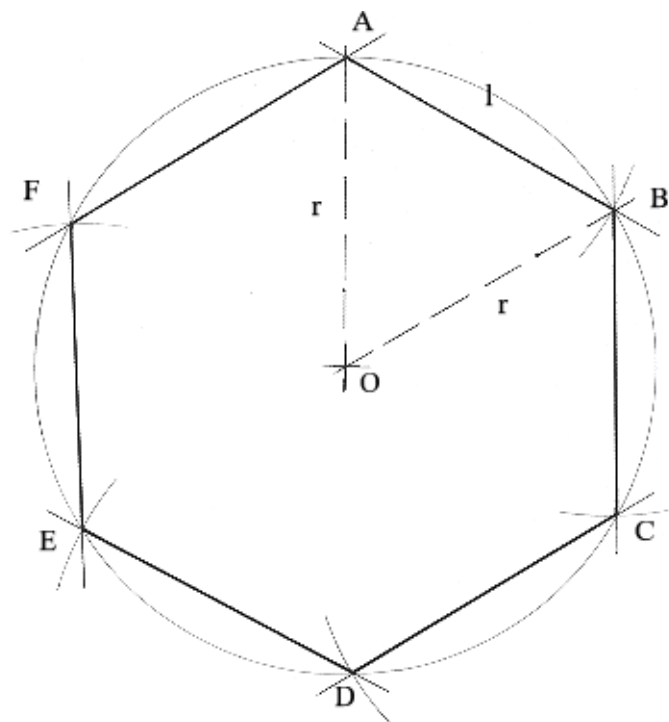
Hexágono regular:

a) A partir do lado: Já conhecemos a relação métrica entre o lado do hexágono e o raio da circunferência, então: traçamos o lado e, fazendo centro em cada extremidade do mesmo, com raio igual ao próprio lado, cruzamos dois arcos que definem um ponto que será o centro da circunferência que circunscreve o hexágono. Traçamo-la.

Aplica-se a medida do lado sobre a circunferência, a partir de uma das extremidades, definindo-se os demais vértices e traça-se a figura.



b) Inscrito na circunferência: Traça-se a circunferência e aplica-se a medida do raio sobre a mesma, dividindo-a em seis partes iguais e constrói-se o hexágono.



Heptágono regular:**a) A partir do lado:**

Seja o lado AB.

Prolonga-se o lado, na direção de B. Centro em B, raio BA, rebate-se a medida em M.

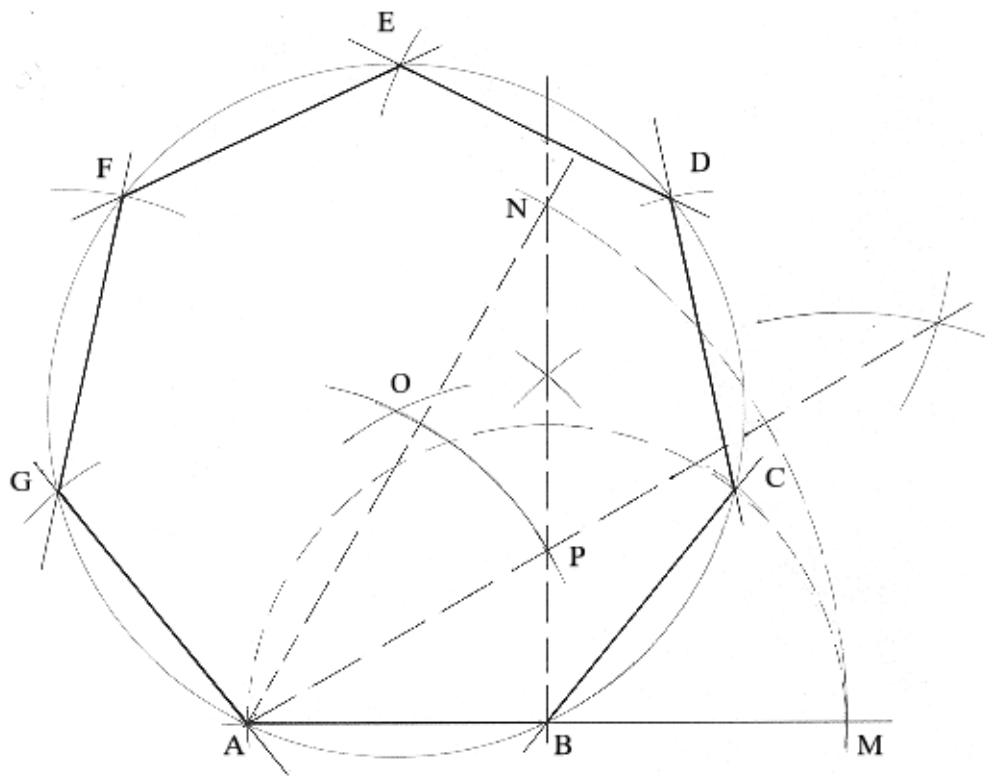
Por B, levanta-se uma perpendicular.

Centro em A, raio AM, cruza-se o arco sobre a perpendicular, determinando N.

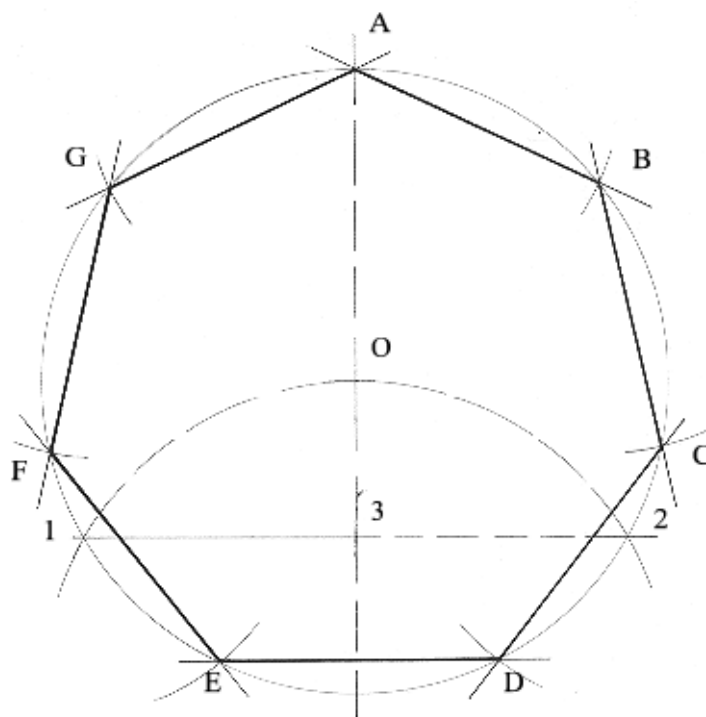
Traça-se a bissetriz do arco MN. Esta bissetriz cruza a perpendicular em P.

Centro A, raio AP, cruza-se com centro B, raio AP, determinando o ponto O.

O ponto O é o centro da circunferência que circunscreve o heptágono, portanto: centro em O, raio AO ou OB, descreve-se a mesma. Aplica-se, então, a medida do lado, a partir de B, sucessivas vezes sobre a circunferência, até dividi-la em sete partes iguais, construindo-se, então o heptágono.

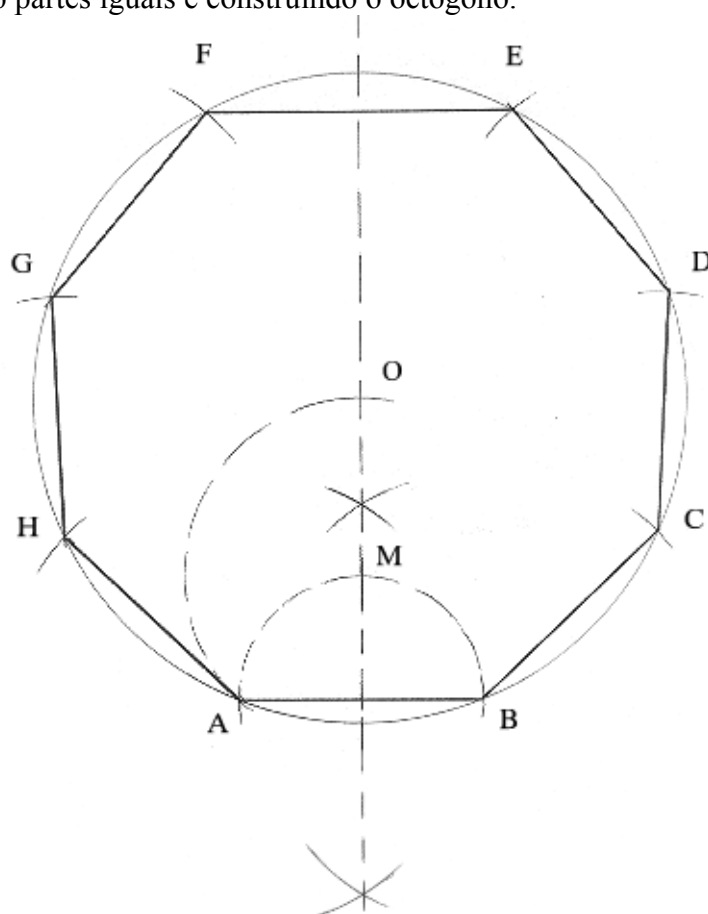


b) Inscrito na circunferência: Descreve-se a circunferência e traça-se uma reta que passa pelo seu centro, definindo o diâmetro. Centro numa das extremidades, mesmo raio da circunferência, traça-se um arco que corta a mesma nos pontos 1 e 2. Traça-se o segmento 12 que, ao cruzar o diâmetro, define o ponto 3. O segmento 13 corresponde à medida do lado do heptágono. Tal medida, aplicada sucessivas vezes sobre a circunferência, definirá a figura.

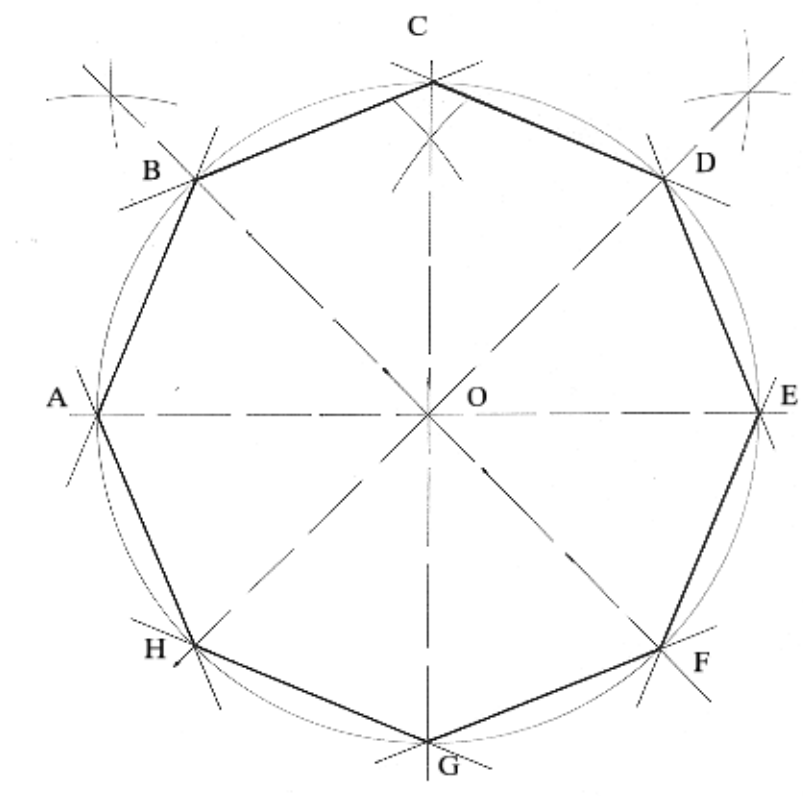


Octógono regular:

a) A partir do lado: Traça-se o lado AB e sua mediatriz. Centro no ponto médio, abertura até uma das extremidades, traça-se o arco que corta a mediatriz em M. Centro em M, raio MA, traça-se o arco que corta a mediatriz em O. Este ponto é o centro da circunferência que circunscreve o octógono. Descreve-se a mesma e aplica-se a medida do lado sucessivas vezes, dividindo-a em oito partes iguais e construindo o octógono.



b) **Inscrito na circunferência:** Traça-se a circunferência e dois diâmetros perpendiculares. Traçando-se as bissetrizes dos ângulos de 90° , teremos a circunferência dividida em oito partes iguais. Construimos, então, o octógono.

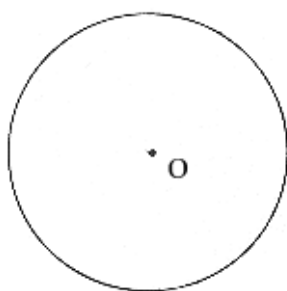


9. CIRCUNFERÊNCIA

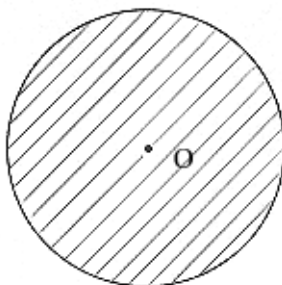
Ao final desta unidade, você estará apto a:

- Definir e classificar circunferência;
- Definir posições relativas de circunferências;

9.1. DEFINIÇÃO: É o conjunto de pontos, pertencentes a um plano e equidistantes de um único ponto, chamado centro. Circunferência é, pois, uma linha curva, plana e fechada.



9.2. CÍRCULO: É a porção do plano limitada por uma circunferência. O círculo é, portanto, uma superfície. Daí afirmar-se que a circunferência é o contorno do círculo.



9.3. LINHAS DA CIRCUNFERÊNCIA:

a) Raio (AO): É o segmento de reta que une o centro a qualquer ponto da circunferência. Pela própria definição da curva, os raios são todos iguais.

b) Secante (s): É a reta que **seca** (corta) a circunferência em dois de seus pontos.

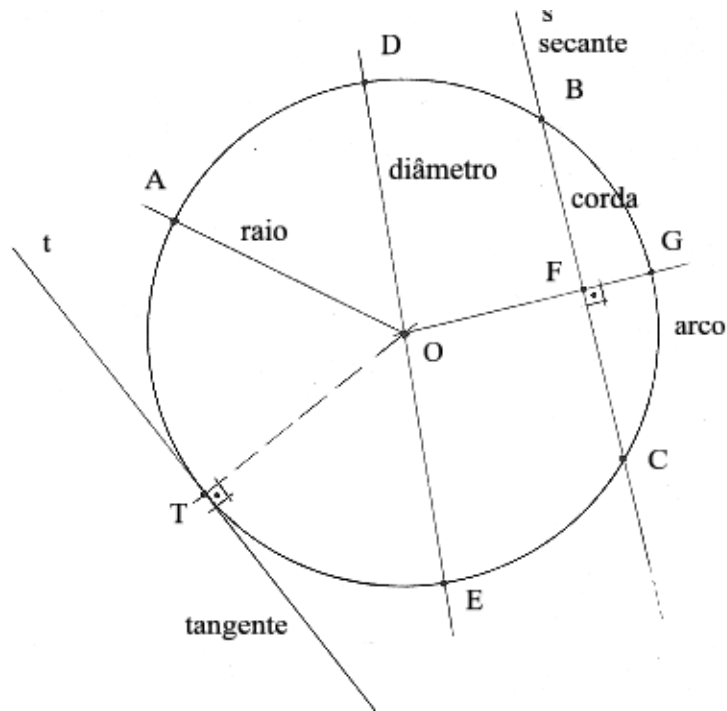
c) Corda(BC): É o **segmento** de reta que une dois pontos de uma circunferência e tem a secante como reta suporte.

d) Diâmetro(DE): É a **corda** que passa pelo centro da circunferência. O diâmetro é, pois, a maior corda e é constituído por dois raios opostos. Daí dizer-se que o diâmetro é o dobro do raio. O diâmetro divide a circunferência em duas partes iguais denominadas semicircunferências. Por extensão do raciocínio, temos que o círculo pode ser dividido em dois semicírculos.

e) Arco(BC), (BG), (CE), (AD), etc : É uma parte qualquer da circunferência, compreendida entre dois de seus pontos. A toda corda corresponde um arco e vice-versa.

f) Flecha(FG) : É o trecho **do** raio perpendicular a uma corda e limitado pela mesma corda e o arco que lhe corresponde.

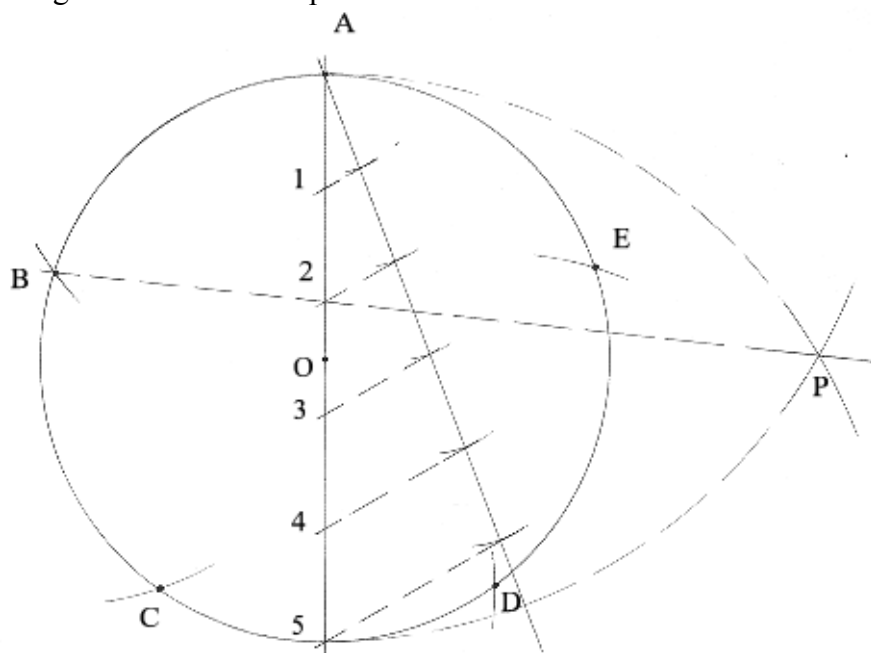
g) Tangente(t) : É a **reta** que toca a circunferência em um só ponto e é perpendicular ao raio que passa por esse ponto. Este ponto chama-se ponto de tangência.



9.4. DIVISÃO DA CIRCUNFERÊNCIA EM PARTES IGUAIS: MÉTODO GERAL DE BION:

- Descreve-se a circunferência e traça-se seu diâmetro.
- Divide-se o diâmetro, pelo processo de deslizamento de esquadros, no número de vezes em que se quer dividir a circunferência.
- Centro em cada extremidade do diâmetro, com abertura igual ao próprio diâmetro, faz-se o cruzamento dos arcos, determinando o ponto P.
- Traça-se a reta que passa pelos pontos P e 2, da divisão do diâmetro.
- Esta reta corta a circunferência no ponto B.
- O arco AB corresponde a divisão da circunferência no número de vezes pretendido. Tal medida deve, portanto, ser aplicada sucessivas vezes sobre a curva, dividindo-a.

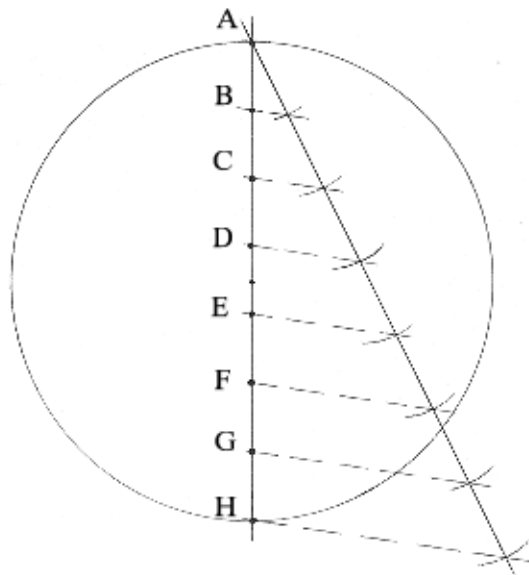
Obs: A aplicação mais comum da divisão de uma circunferência em partes iguais é a construção do polígono regular inscrito correspondente ao número de lados.



9.5. RETIFICAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA: Retificar uma circunferência é o mesmo que traçar o segmento de reta que corresponde à medida de seu comprimento. Existem diversos métodos de retificação, desenvolvidos por vários geômetras. Apresentaremos como exemplo o processo desenvolvido por Arquimedes:

*) Como sabemos, e Arquimedes também, há uma relação métrica constante entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Tal relação é representada pela famosa fórmula: $c=2(\pi).r$. O valor de π é aproximadamente 3,1416. Pois bem, Arquimedes, em seus cálculos, chegou à seguinte conclusão: $22/7=3,1428$. Considerando-se a aproximação dos valores, a fórmula ficou do seguinte modo: $c=2(22/7).r$, onde $2r=D$ (diâmetro). Assim: $c=22D/7$. O que também pode ser interpretado assim: $c=3D+D/7$. Deste modo, conclui-se que o comprimento de uma circunferência é, aproximadamente, o triplo mais um sétimo do diâmetro. Então: dividindo-se o diâmetro de uma circunferência em sete partes iguais e aplicando-se este valor mais três vezes a medida do diâmetro sobre uma reta, obtém-se o segmento de reta que corresponde ao comprimento da curva.

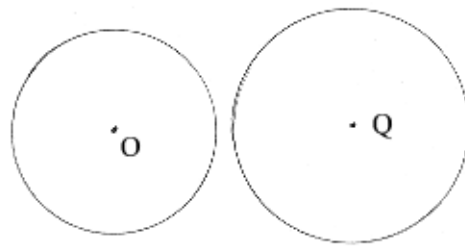
No exemplo abaixo temos que: AH é o diâmetro da circunferência. Este diâmetro foi dividido em 7 partes iguais. A circunferência retificada corresponde, portanto, a 3 vezes a medida AH mais uma das 7 partes (AB, por exemplo).



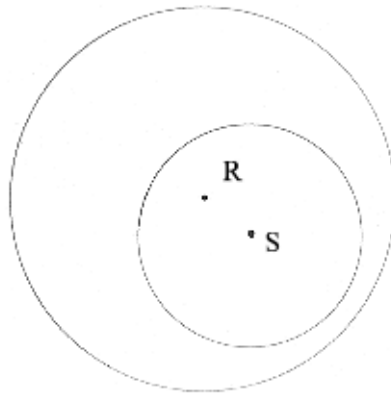
9.6. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS:

9.6.1. Não secantes: quando não têm ponto comum. Podem ser:

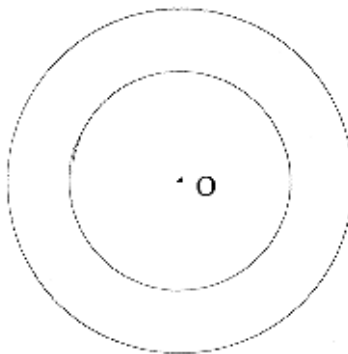
Exteriores



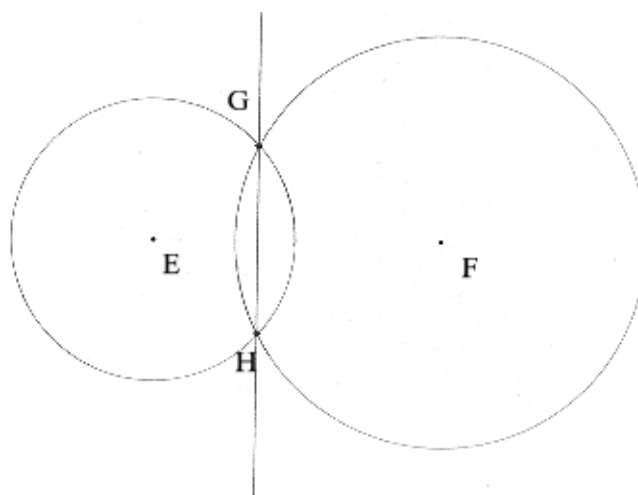
Interiores



Concêntricas: quando têm o mesmo centro.

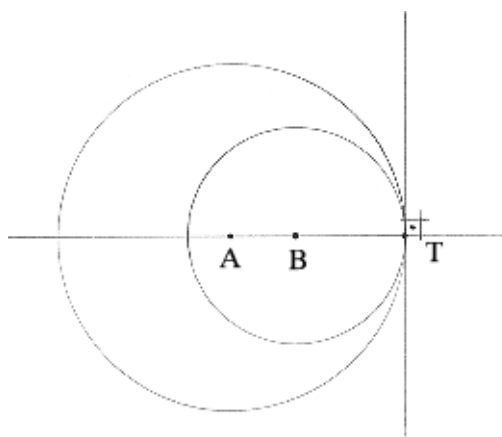


9.6.2. Secantes: quando têm dois pontos comuns.

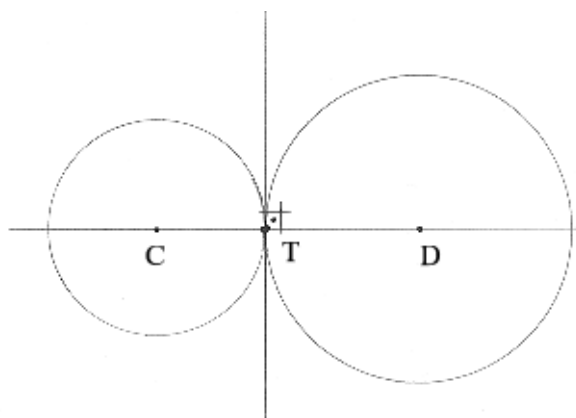


9.6.3. Tangentes: quando têm um ponto comum. Podem ser:

a) Tangentes internas

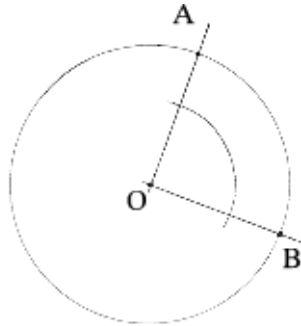


b) Tangentes externas

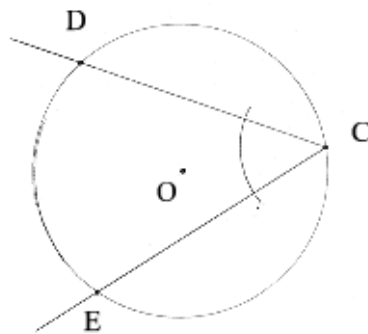


9.7. ÂNGULOS DA CIRCUNFERÊNCIA:

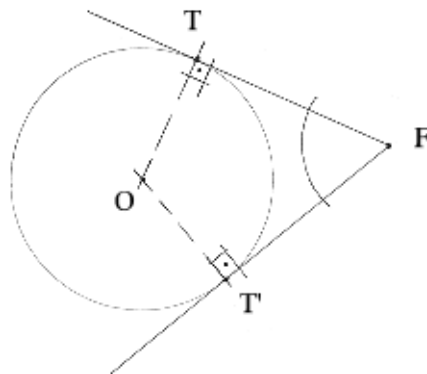
- a) **Ângulo central:** É aquele que tem o vértice no centro da circunferência e os lados são raios.



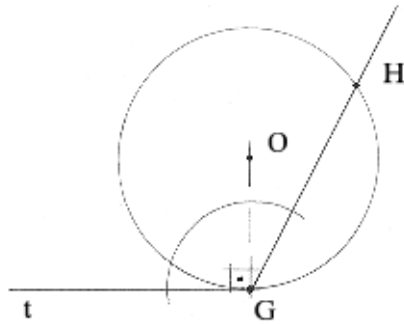
- b) **Ângulo inscrito:** O vértice é um ponto da circunferência e os lados são cordas.



- c) **Ângulo circunscrito:** O vértice está fora da circunferência e os lados são tangentes à mesma.



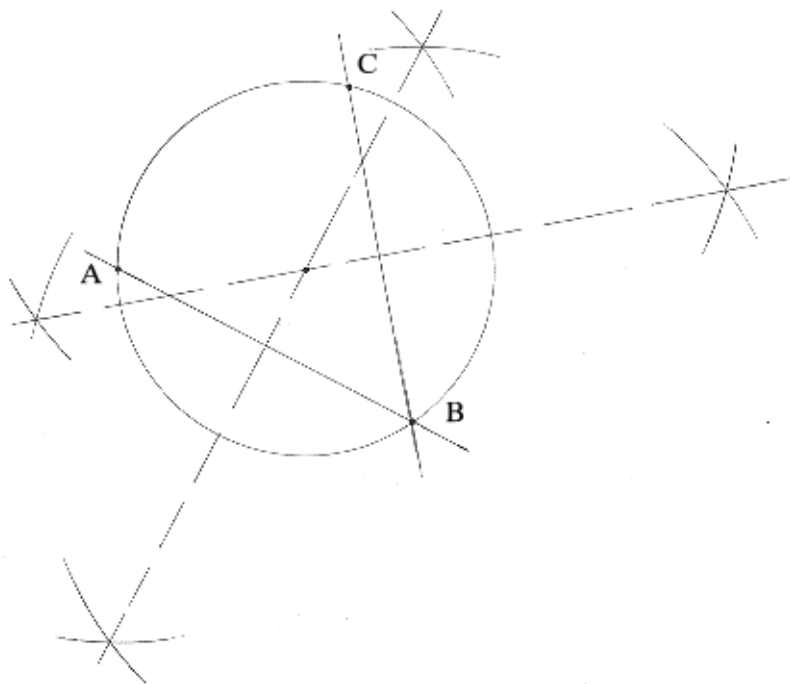
- d) **Ângulo de segmento:** Quando um dos lados for uma corda e o outro tangente à circunferência. O ponto de contato do lado tangente é o vértice do ângulo.



9.8. EXERCÍCIOS:

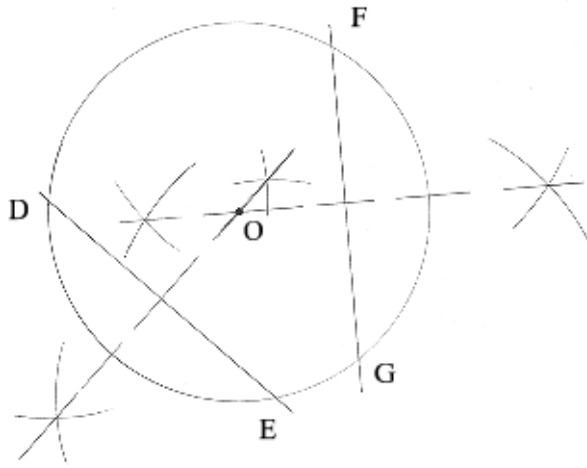
- 1) Traçar uma circunferência que passe por três pontos não alinhados.

Resolução: Três pontos não alinhados formam um triângulo. Sabemos que todo triângulo é inscrito numa circunferência porque o centro da mesma é equidistante dos vértices e chama-se circuncentro, ponto de cruzamento das mediatrizes dos lados do triângulo. Cada lado do triângulo formado é uma corda da circunferência. Toda mediatriz de uma corda, portanto, passa pelo centro da curva. Assim, traçando-se as mediatrizes de cada lado do triângulo, encontramos o centro e descrevemos a circunferência.



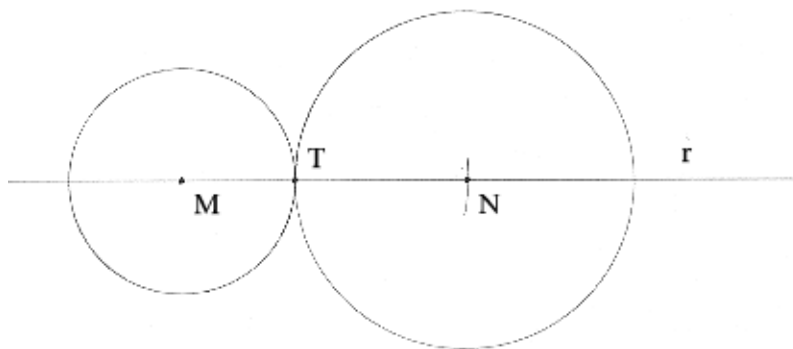
- 1) Determinar o centro de uma circunferência.

Resolução: Pelo mesmo raciocínio do exercício anterior, traçamos duas cordas quaisquer e suas mediatrizes, que determinarão o centro da curva.

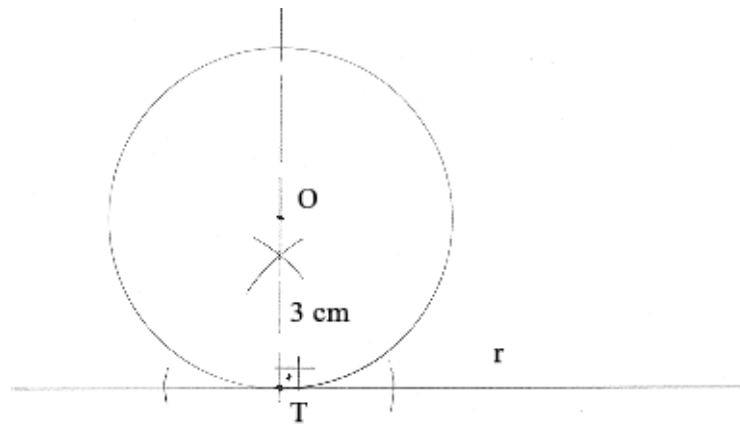


- 2) Traçar duas circunferências tangentes entre si.

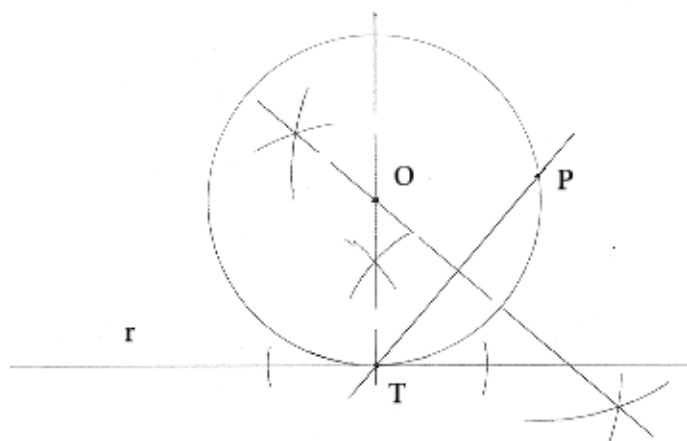
Resolução: Duas circunferências são tangentes quando têm raios posicionados sobre a mesma reta. Assim, traçamos primeiramente uma reta e assinalamos o centro de uma das curvas, descrevendo-a em seguida. Com centro no cruzamento da curva com a reta e abertura igual ao raio da outra circunferência, determinamos o centro e a descrevemos em seguida.



- 3) Traçar uma circunferência de raio 3 cm, tangente a uma reta num ponto dado.
Resolução: Para que haja tangência, é necessário que o raio que contém o ponto de tangência seja perpendicular à reta. Assim, traçamos a reta e, por um ponto qualquer, levantamos uma perpendicular, medindo-se sobre esta, a partir do ponto, a medida do raio, definindo-se o centro. Descrevemos então a circunferência.

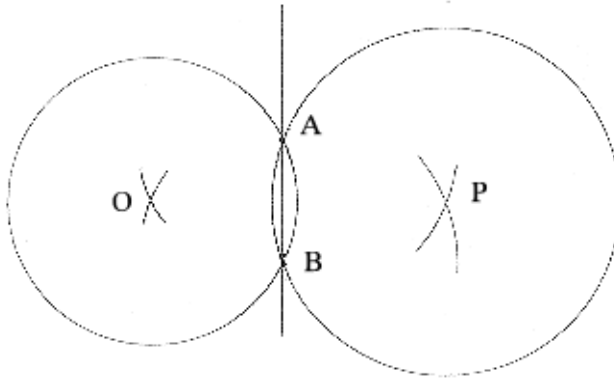


- 4) Traçar uma circunferência tangente a uma reta num ponto dado e que passe por outro ponto fora da reta.
Resolução: Pelo ponto dado, levanta-se uma perpendicular. Unindo-se o ponto da reta ao ponto fora da mesma, temos um segmento de reta que é uma corda da circunferência a ser traçada. Traçamos, então, a mediatriz deste segmento que, ao cruzar com a perpendicular, define o centro da curva.



5) Traçar duas circunferências de raios 2,5 e 3 cm, que possuem uma corda comum igual a 2 cm.

Resolução: Traça-se o segmento de reta que corresponde à corda. Com centro em cada extremidade e abertura igual ao raio de uma das circunferências, definimos, pelo cruzamento dos mesmos, o centro desta curva. Procedendo da mesma maneira, com o raio da outra curva, determinamos o centro desta outra. Traçamos então as duas curvas.

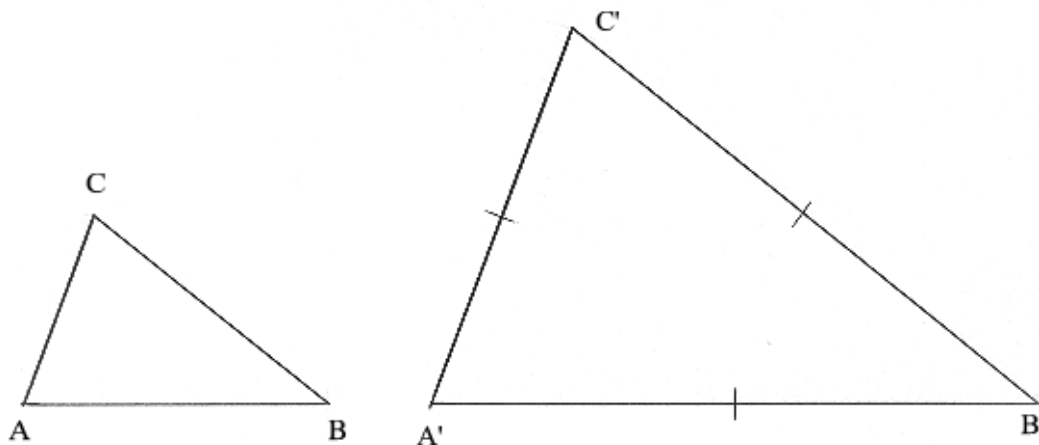


A corda AB tem 2 cm. Com centro em A e B, raio 2,5 cm, determinamos o ponto O e traçamos a primeira circunferência. A mesma operação é feita, agora com raio 3 cm, para determinar o ponto P e o traçado da segunda curva.

10. SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

10.1. DEFINIÇÃO: Duas figuras são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes iguais e lados homólogos proporcionais. Dois lados homólogos consecutivos formam ângulos iguais.

10.2. RAZÃO DE SEMELHANÇA: É o número que exprime a proporção entre os lados homólogos.



No triângulo ABC temos que o ângulo A é igual ao ângulo A', o B igual ao B' e o C igual ao C'. O lado AB e o lado A'B' são proporcionais na razão de 1:2 (um para dois-razão de semelhança) assim como os lados BC e B'C' e AC e A'C'.

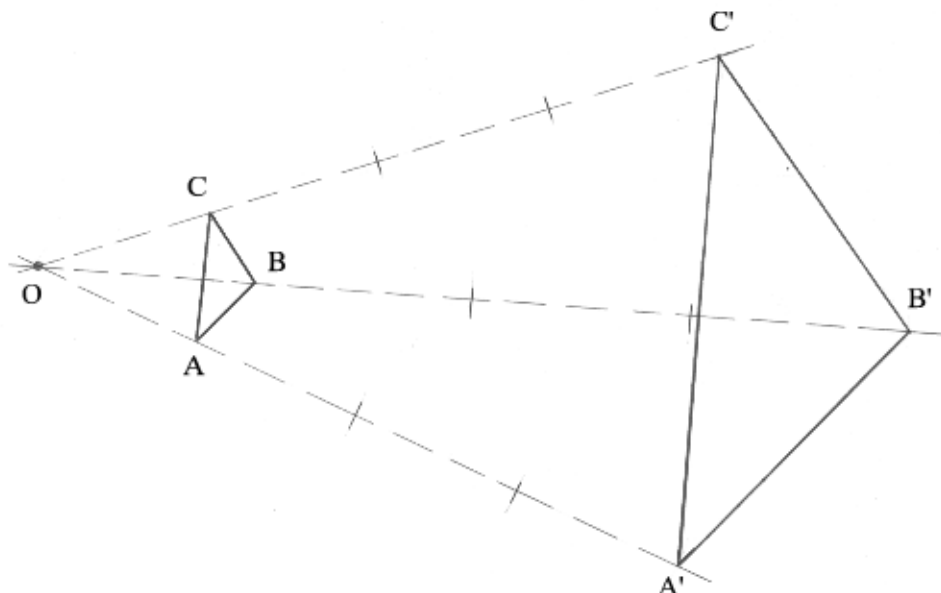
O lado A'B' foi traçado com o dobro do tamanho de AB. Os ângulos A e B foram transportados (vide: “transporte de ângulos”) nas extremidades correspondentes. O encontro desses dois lados definiu o vértice C.

10.3. CONSTRUÇÃO DE FIGURAS SEMELHANTES: Podemos construir uma figura semelhante a uma primeira pelo transporte dos ângulos correspondentes e aplicando-se sobre os lados a proporção ou razão de semelhança indicada.

Outra forma de obtermos figuras semelhantes é pelo traçado das diagonais da primeira figura, dividindo-a em vários triângulos e, em seguida fazendo o transporte de cada parte (triângulo) na posição correspondente, e obedecendo a razão de semelhança, até completarmos a figura.

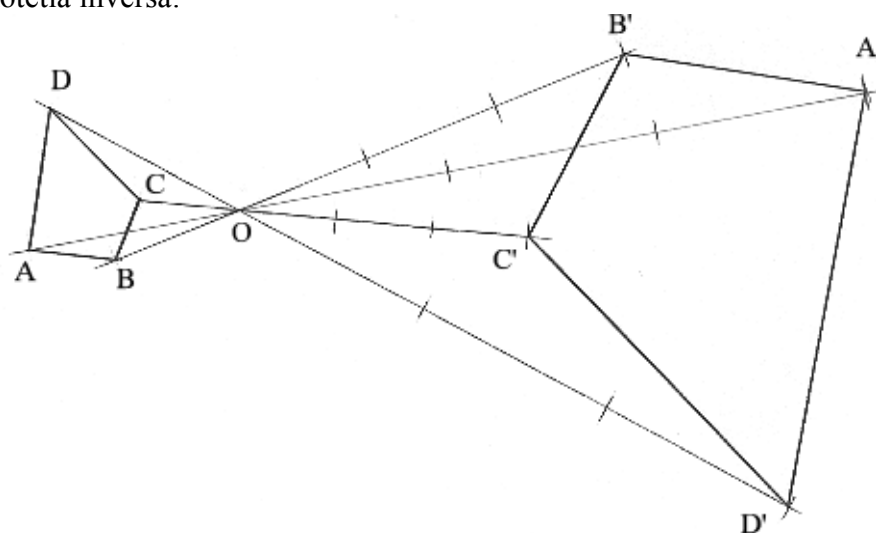
10.4. HOMOTETIA: Figuras homotéticas são figuras semelhantes dispostas de maneira que os lados homólogos fiquem paralelos. A homotetia pode ser **direta** ou **inversa**, conforme a posição dos elementos da figura. **Centro de homotetia** direta ou inversa é o ponto que usamos como referência para o traçado da figura.

Homotetia direta:



Dado o triângulo ABC, assinalamos o ponto O (centro de homotetia) numa posição qualquer. Passando pelo centro de homotetia e por cada vértice do ângulo, são traçadas retas e, sobre estas, são rebatidas as respectivas distâncias de cada vértice ao centro, na proporção (razão de semelhança) indicada. No exemplo, temos a razão de 1:3.

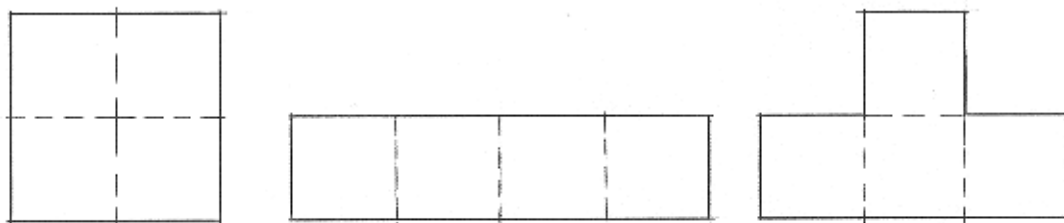
homotetia inversa:



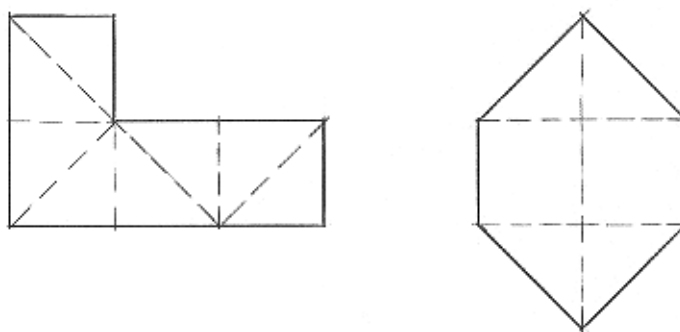
Dado o quadrilátero ABCD, posicionamos o centro de homotetia (O) e traçamos as retas, procedendo como no caso anterior. Note que o centro está posicionado entre as duas figuras, o que faz com que as figuras apresentem-se invertidas, uma em relação à outra. Observe também que, mesmo invertidos, os lados correspondentes são sempre paralelos.

11. EQUIVALÊNCIA DE FIGURAS PLANAS

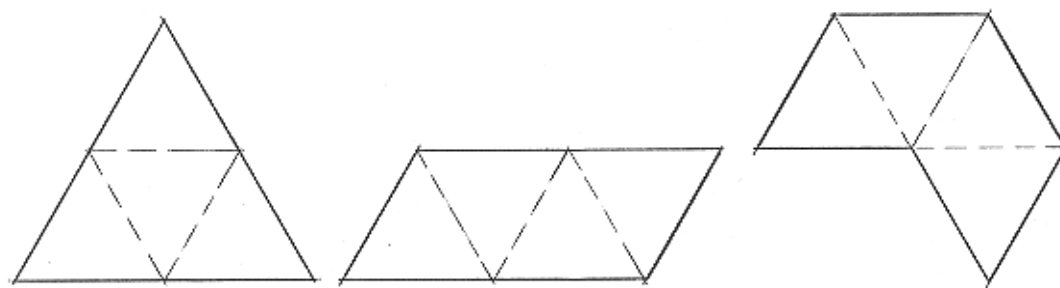
11.1. DEFINIÇÃO: Duas figuras são equivalentes quando têm formatos diferentes e áreas iguais.



Temos nas figuras que, a partir da forma do quadrado, o mesmo foi desmembrado em quatro outros, compondo as demais figuras, que mantêm a mesma área.



Agora, dividimos mais os quadrados, pelo traçado de suas diagonais, obtendo triângulos. Note que permanecemos com a mesma área, portanto, todas as figuras são equivalentes.



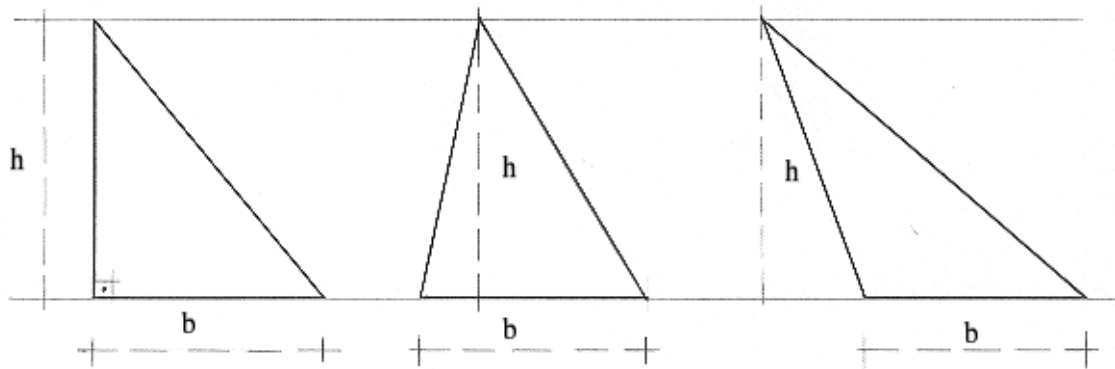
Este outro exemplo mostra figuras originárias do triângulo equilátero e, como nos casos anteriores, mantendo sempre a mesma área.

11.2. EQUIVALÊNCIA DE TRIÂNGULOS: Dois triângulos são equivalentes quando possuem bases e alturas iguais, embora seus formatos sejam diferentes.

*) A definição escrita acima nada mais é do que a interpretação gráfica da velha fórmula da área do triângulo: $A = b \cdot h / 2$ (a área é igual à base vezes a altura sobre dois).

Note que, mantendo-se a igualdade das áreas e das alturas, o resultado será sempre igual, quaisquer que sejam os formatos dos triângulos.

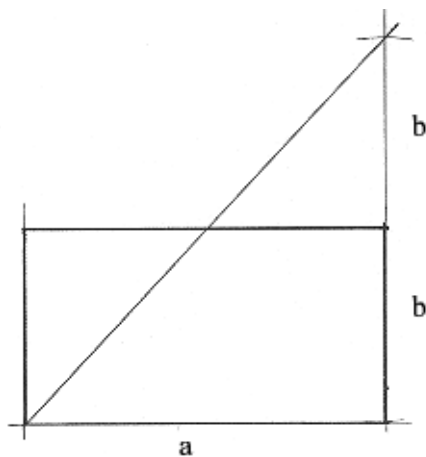
A equivalência de triângulos tem seu estudo em destaque pelo fato de que todo polígono, qualquer que seja o seu número de lados, pelo traçado de suas diagonais, pode ser desmembrado em vários triângulos, facilitando o seu estudo.



11.3. EXERCÍCIOS:

1) Construir um triângulo equivalente a um retângulo dado.

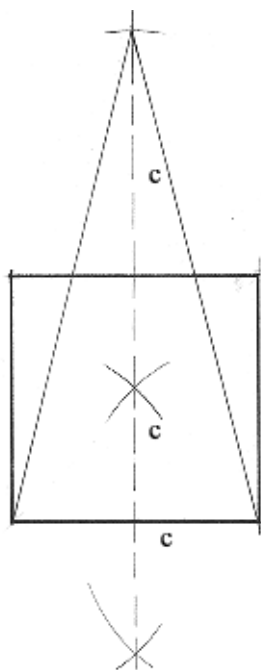
Resolução: a base do triângulo é igual ao lado maior do retângulo e a altura é o dobro do lado menor.



Todas as figuras devem ser construídas pelo processo geométrico correspondente, já estudado. Pelo transporte e rebatimento de distâncias com o compasso, obtemos as distâncias necessárias à construção.

2) Construir um triângulo equivalente a um quadrado dado.

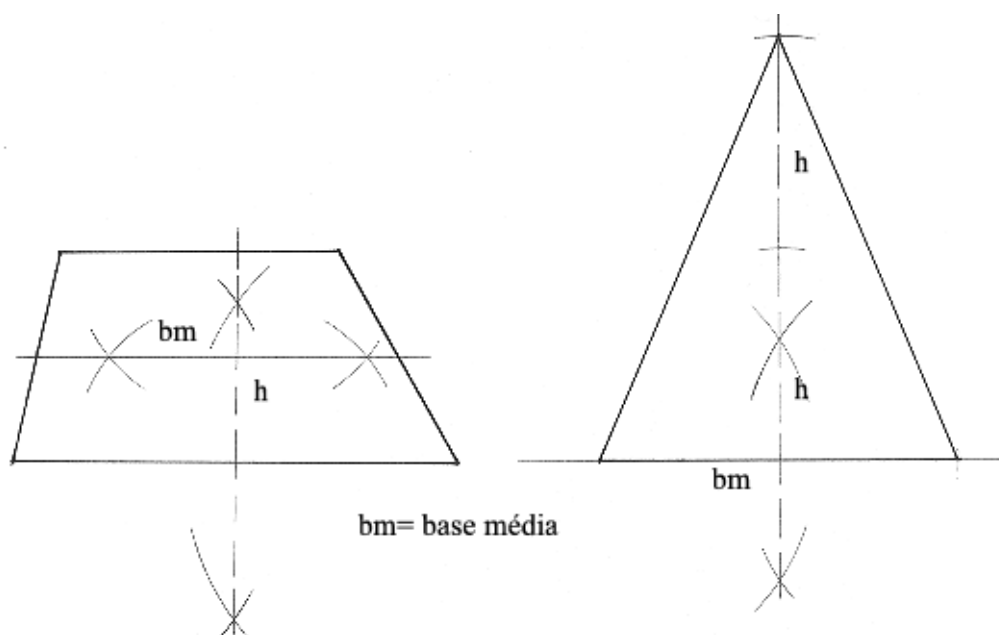
Resolução: a base do triângulo é igual ao lado do quadrado e a altura é o dobro do lado.



3) Construir um triângulo equivalente a um trapézio dado.

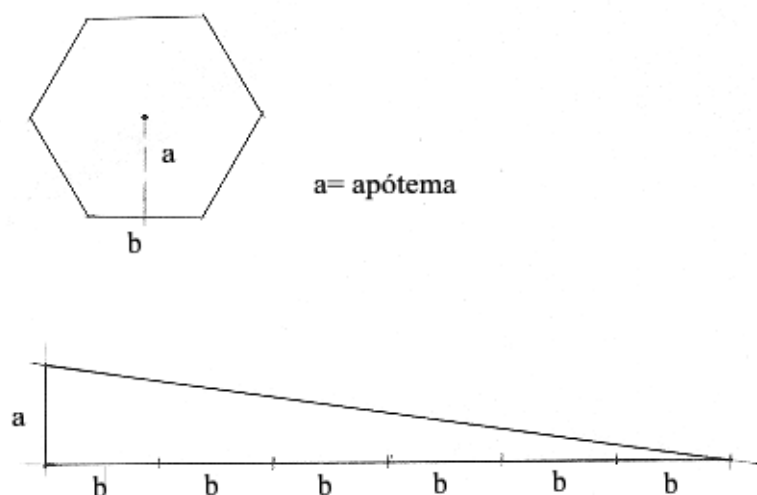
Resolução: a base do triângulo é igual à base média do trapézio* e a altura (do triângulo) é o dobro da altura do trapézio.

*Base média de um trapézio: é o segmento paralelo às duas bases do trapézio e traçado pelo ponto médio da altura.

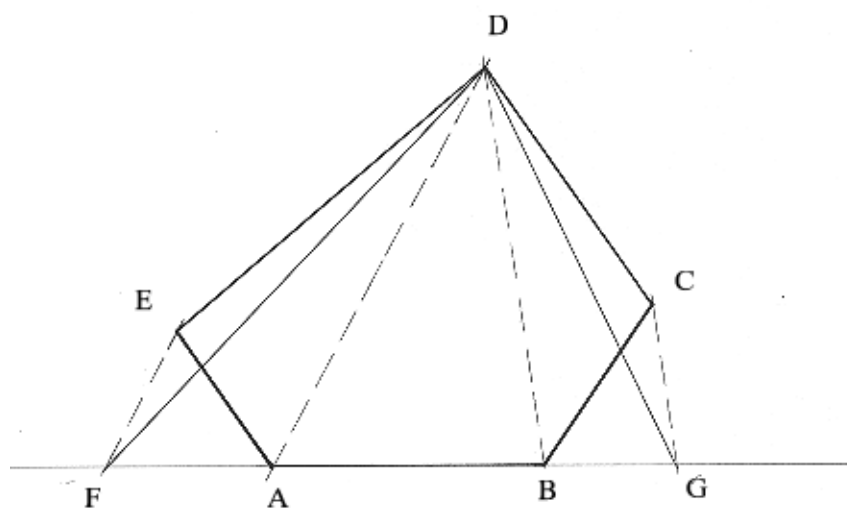


4) Construir um triângulo equivalente a um polígono regular qualquer.

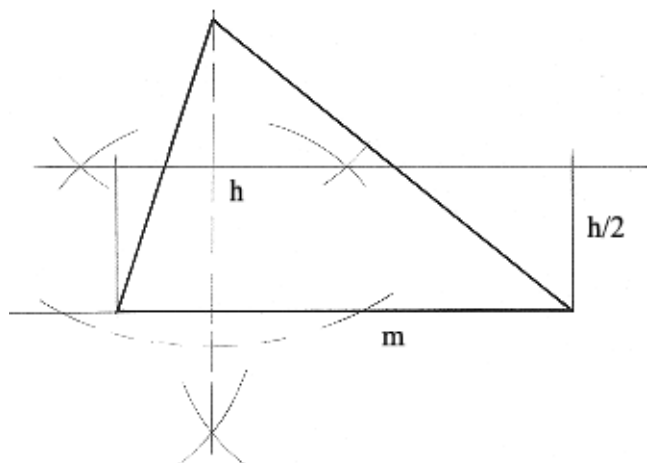
Resolução: a base do triângulo é igual ao perímetro (soma dos lados) do polígono e a altura é igual ao apótema (distância entre o centro da circunferência que circunscreve a figura e um dos lados).



- 5) Construir um triângulo equivalente a um polígono irregular qualquer.
 Resolução: seja o polígono ABCDE. Prolonga-se o lado AB, nas duas extremidades. Traça-se a diagonal AD. Pelo ponto E, traça-se EF, paralelo à AD. Traça-se a diagonal BD. Pelo ponto C, traça-se CG, paralelo à BD. FDG é o triângulo desejado.

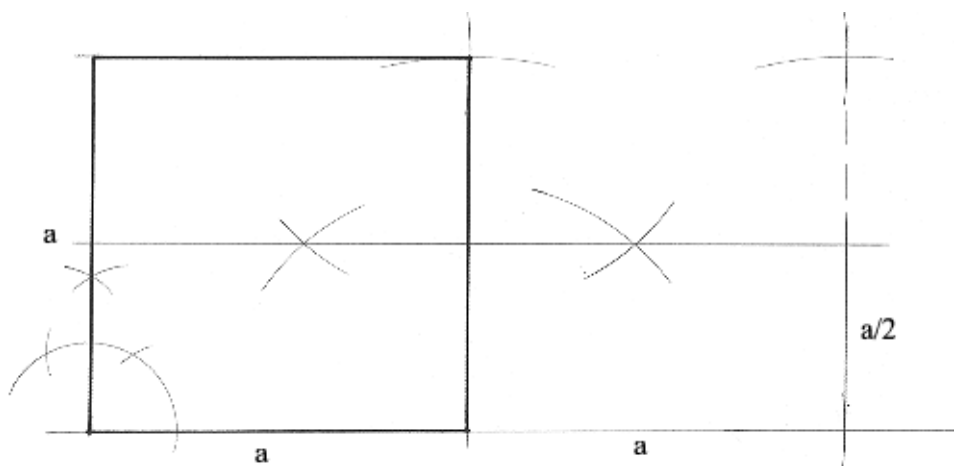


- 6) Construir um retângulo equivalente a um triângulo dado.
 Resolução: um dos lados do retângulo é igual à um dos lados do triângulo. O outro lado é igual à metade da altura.



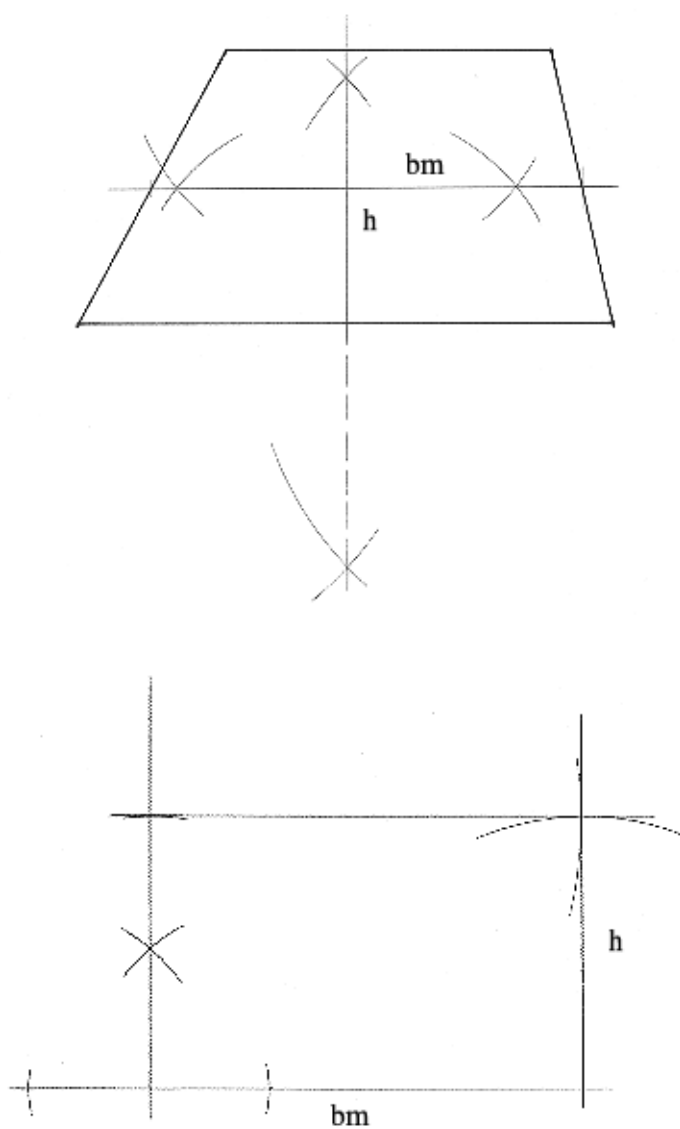
7) Construir um retângulo equivalente a um quadrado dado.

Resolução: um dos lados do retângulo é igual ao dobro do lado do quadrado. O outro lado é igual à metade do lado do quadrado.



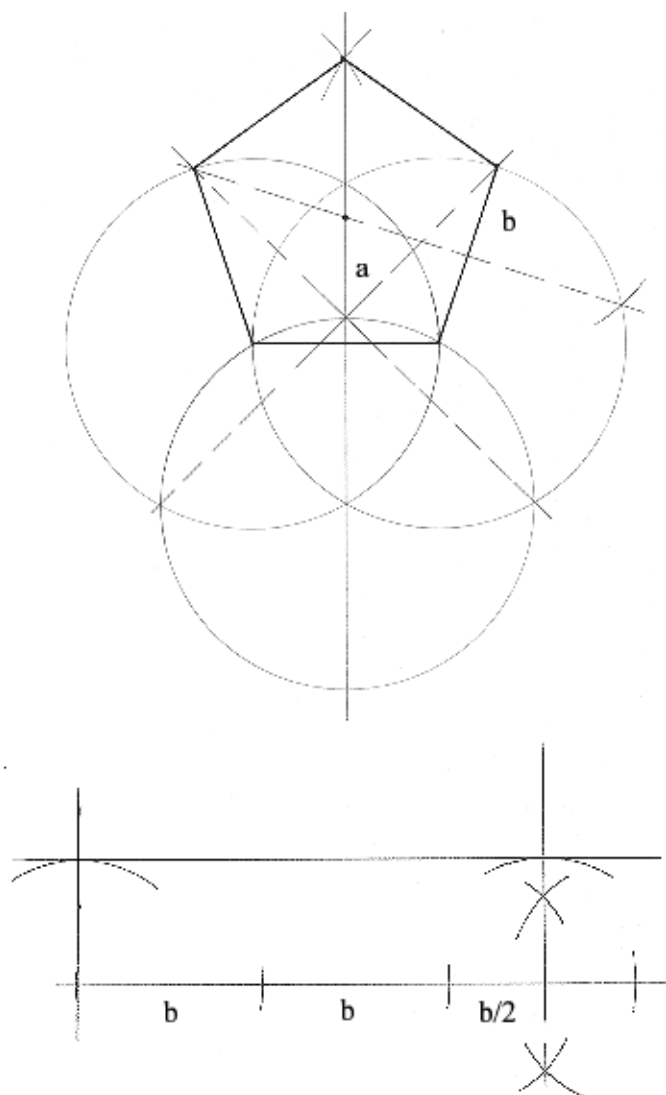
8) Construir um retângulo equivalente a um trapézio dado.

Resolução: um dos lados do retângulo é igual à base média do trapézio. O outro lado é igual à altura do trapézio.



9) Construir um retângulo equivalente a um polígono regular dado.

Resolução: um dos lados do retângulo é igual ao semiperímetro do polígono. O outro lado é igual ao apótema.



12. SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

12.1. DEFINIÇÃO: Sólido geométrico é a porção limitada do espaço geométrico. Os sólidos são corpos que ocupam o espaço de três dimensões e sua medida é chamada de volume. Os sólidos classificam-se em dois grandes grupos: Sólidos de Arestas (ou Poliedros) e Sólidos de Revolução.

12.2. ELEMENTOS DOS SÓLIDOS:

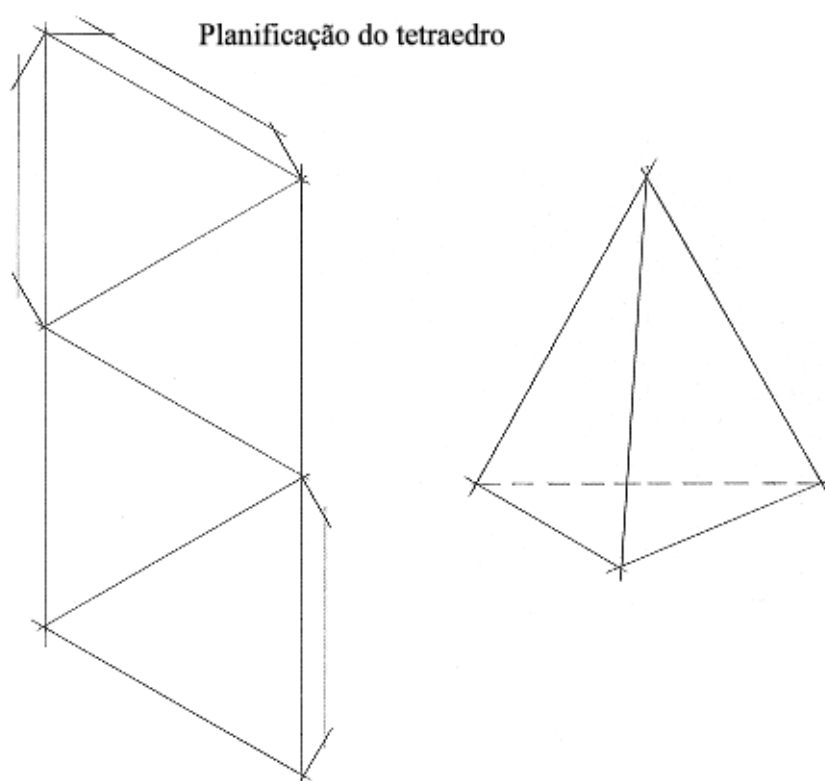
- a) **Faces:** cada um dos polígonos que formam o sólido.
- b) **Diagonais das faces:** diagonais de cada face.
- c) **Arestas:** segmentos de reta resultante da interseção de duas faces.
- d) **Ângulos das faces:** ângulos de cada polígono.
- e) **Ângulos diedros:** ângulos formados entre duas faces.
- f) **Ângulos triedros ou ângulos sólidos:** Ângulos formados por duas ou mais faces.
- g) **Vértices:** ponto de encontro entre duas ou mais arestas.
- h) **Diagonais:** segmentos de reta resultantes da união de dois vértices e que não sejam nem arestas, nem diagonais das faces.

12.3. SÓLIDOS DE ARESTAS

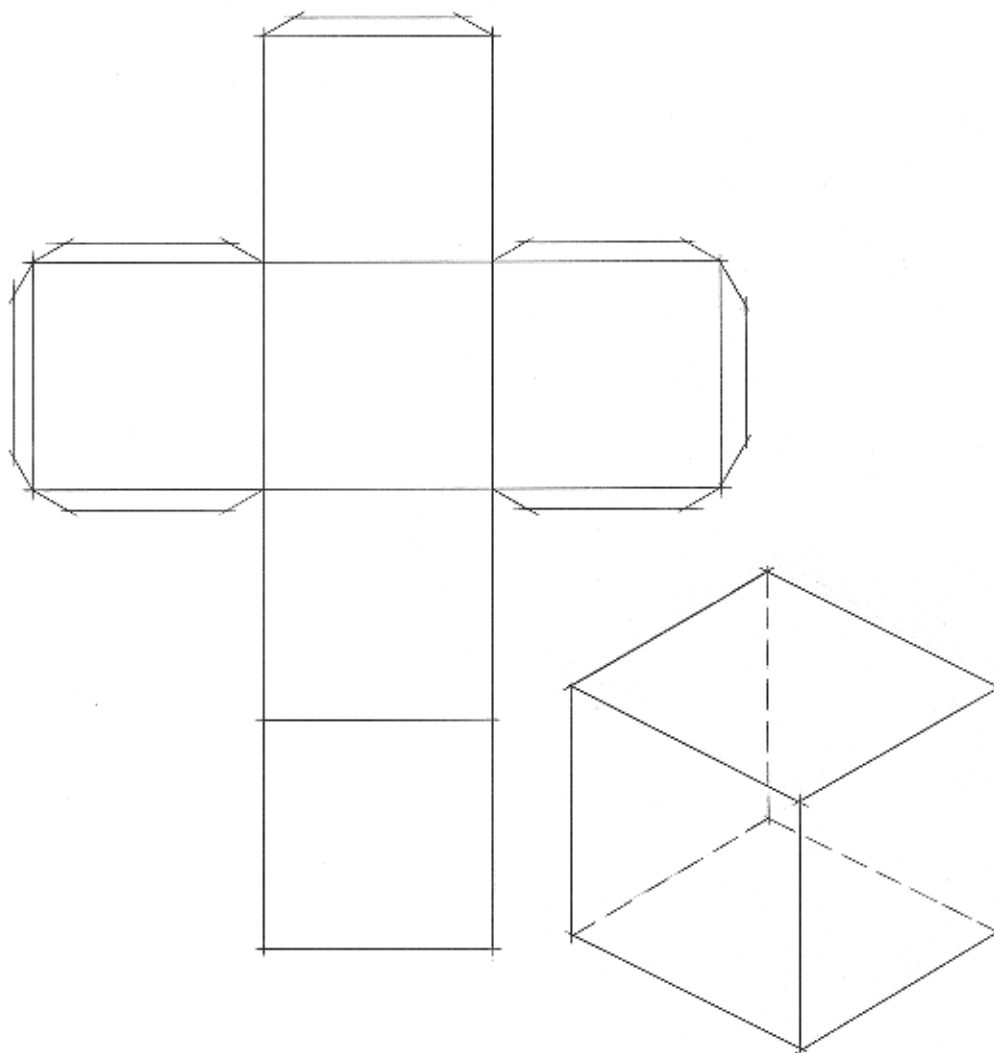
12.3.1. Poliedros: São os sólidos limitados por superfícies planas, que constituem suas faces.

12.3.1.1 - POLIEDROS REGULARES: São os sólidos que têm como faces polígonos regulares iguais entre si. São eles:

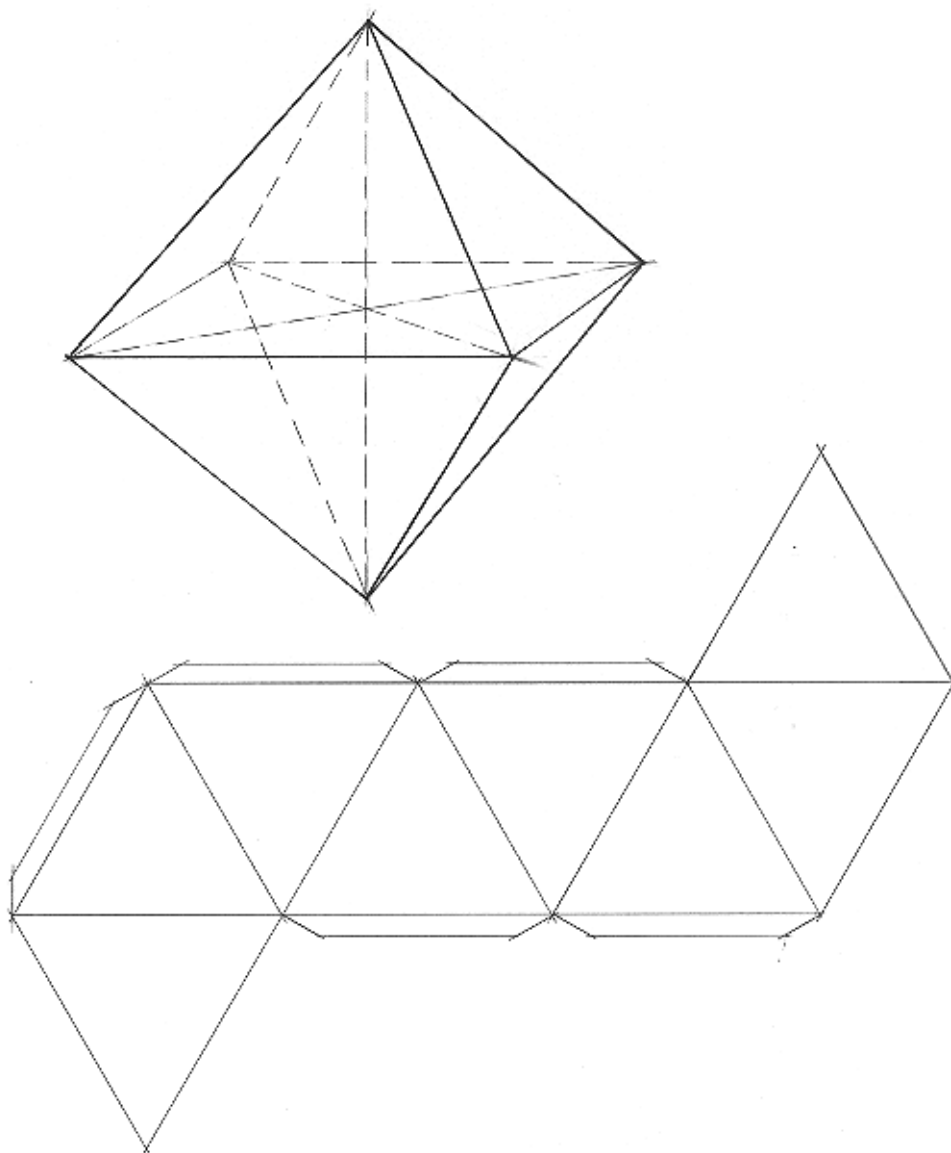
- a) **Tetraedro regular:** As faces são 4 triângulos equiláteros.



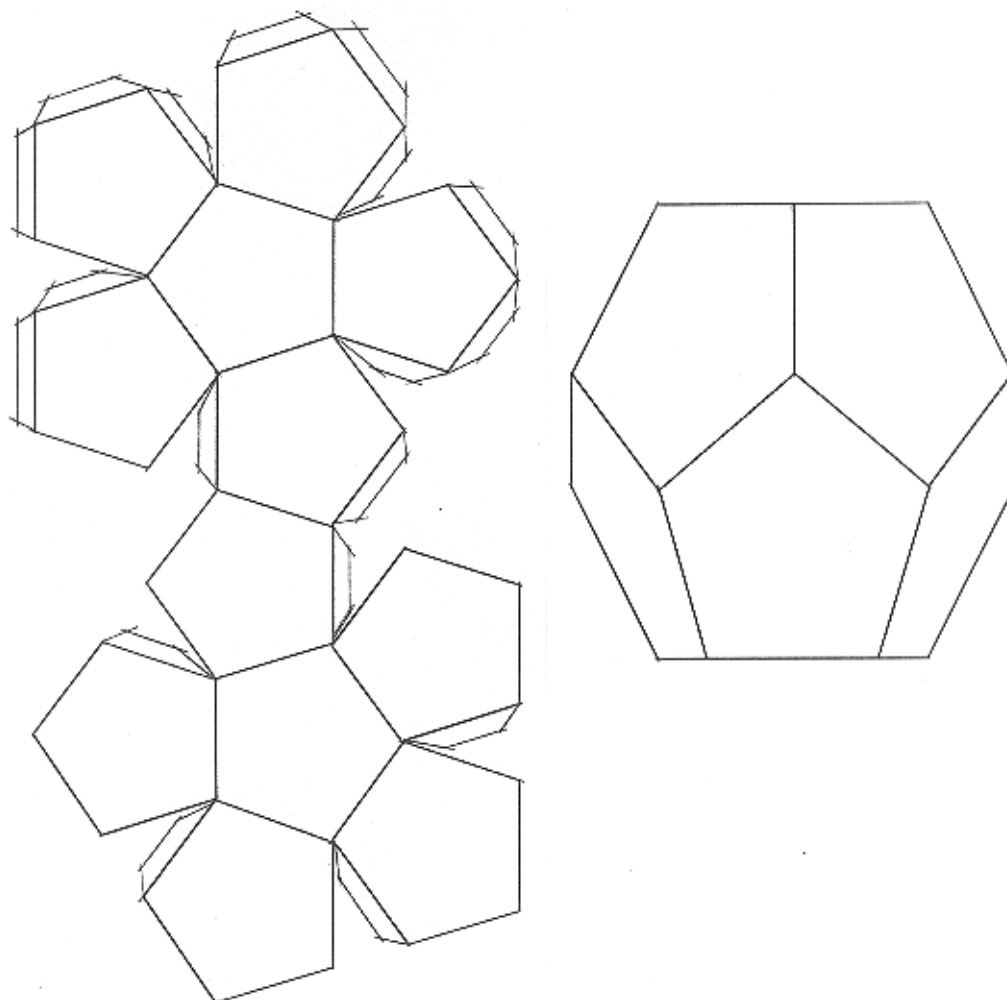
- b) **Hexaedro regular** ou **Cubo**: As faces são 6 quadrados.



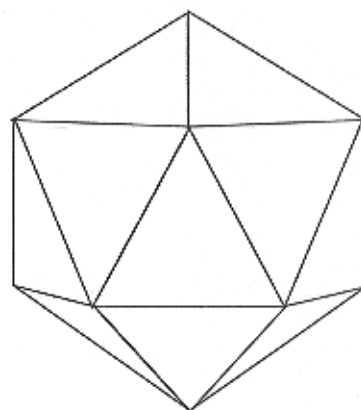
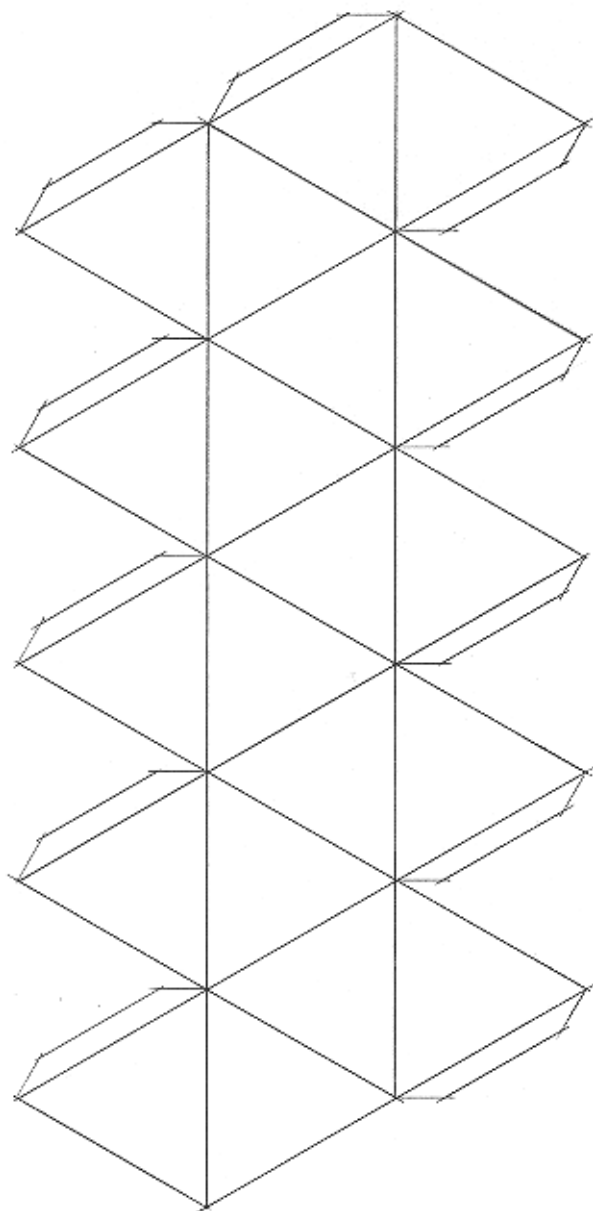
- c) **Octaedro regular:** As faces são 8 triângulos equiláteros.



- d) **Dodecaedro regular:** As faces são 12 pentágonos regulares.



- e) **Icosaedro regular:** As faces são 20 triângulos equiláteros.



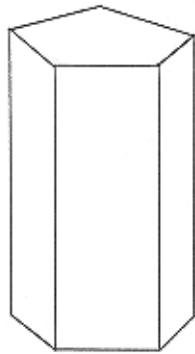
12.3.1.2 - POLIEDROS IRREGULARES: São os sólidos que apresentam faces diferentes entre si. Basta que uma das faces seja diferente para que o sólido seja classificado como irregular. Os poliedros irregulares são: Os Prismas, o Paralelepípedo e as Pirâmides.

PRISMAS: São os poliedros irregulares formados por duas faces ou bases poligonais iguais e paralelas e por faces laterais, que são paralelogramos. Os prismas classificam-se:

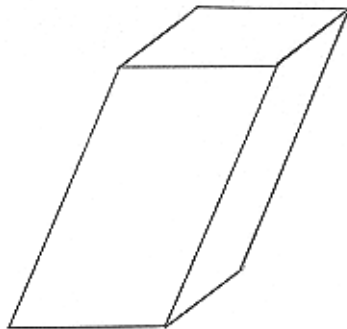
4

a) **Quanto às arestas:**

Prisma reto: As arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.



Prisma oblíquo: As arestas laterais são oblíquas aos planos das bases

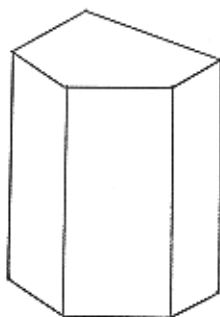


b) **Quanto à forma das bases:**

Prisma regular: As bases são polígonos regulares.



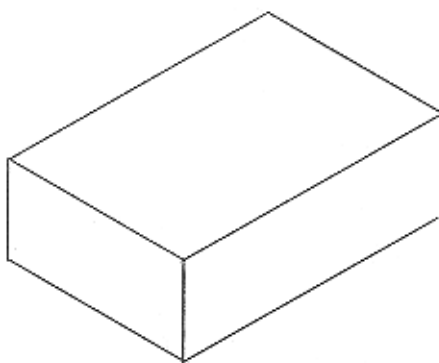
Prisma irregular: As bases são polígonos irregulares.



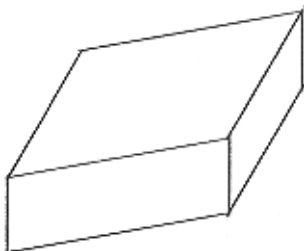
*) As duas classificações se entrelaçam, isto é, podemos ter um prisma reto regular ou irregular e um prisma oblíquo regular ou irregular.

PARALELEPÍPEDO: É o prisma que possui as faces formadas por paralelogramos. O paralelepípedo pode ser **reto** ou **obliquo**, conforme a posição de suas arestas laterais e, quanto à forma das faces, pode também ser:

Paralelepípedo retângulo: as faces são retangulares.



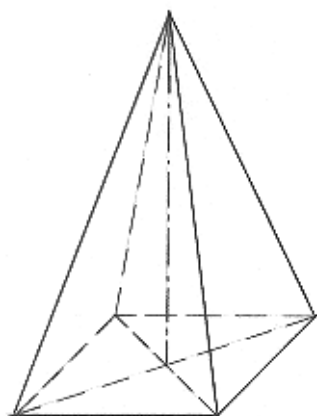
Paralelepípedo de bases em forma de losango (romboedro): as bases são losangos iguais.



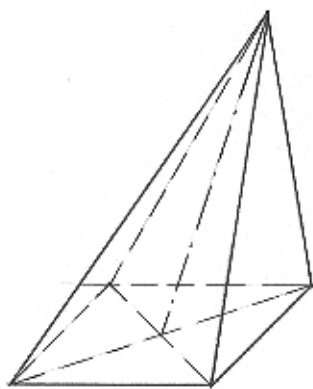
PIRÂMIDES: São sólidos geométricos cujas bases são polígonos quaisquer e as faces laterais são triângulos que concorrem num ponto, que é o vértice das pirâmides. As pirâmides classificam-se:

a) Quanto ao eixo:

Pirâmide reta: o eixo é perpendicular ao plano da base.

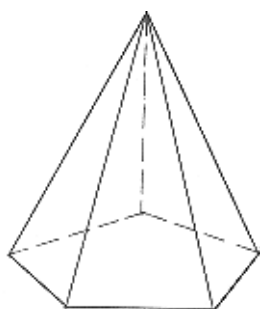


Pirâmide oblíqua: o eixo é oblíquo ao plano da base.

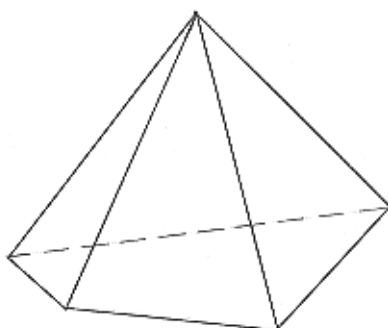


b) Quanto à forma da base:

Pirâmide regular: a base é um polígono regular.



Pirâmide irregular: a base é um polígono irregular.



12.4. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: São os sólidos gerados pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo, que pode ser um dos lados da figura, e situado no mesmo plano. São eles:

12.4.1 - CILINDRO: É o sólido de revolução que resulta da rotação de um retângulo em torno de um de seus lados. O lado oposto e igual ao eixo é a geratriz do cilindro, que vai gerar a superfície de revolução, no caso, a superfície cilíndrica. Os lados perpendiculares ao eixo vão gerar as bases circulares. O cilindro classifica-se em reto ou oblíquo, de acordo com a posição do eixo em relação às bases.

12.4.2 - CONE: É o sólido de revolução que resulta da rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, que será o eixo do cone. A hipotenusa é a geratriz e vai gerar a superfície cônica. O outro cateto gera a base circular. O cone pode ser reto ou oblíquo, conforme a posição do eixo em relação à base.

12.4.3 - ESFERA: É o sólido de revolução que resulta do giro de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro. A semicircunferência gerará a superfície esférica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Penteado, José de Arruda – Comunicação Visual e Expressão – Artes Plásticas e Desenho, Vol. 2 – Companhia Editora Nacional / São Paulo/SP

Carvalho, Benjamin de A. – Desenho Geométrico – Ao Livro Técnico S. A. Rio de Janeiro/RJ

Putnoki, José Carlos – Geometria e Desenho Geométrico – Editora Scipione São Paulo/SP

Pinto, Nilda Helena S. Corrêa – Desenho Geométrico – Editora Moderna – São Paulo/SP

Lopes, Elizabeth Teixeira / **Kanegae**, Cecília Fugiko – Desenho Geométrico Editora Scipione – São Paulo/SP